

Eerste deeltentamen Speltheorie

10 November, 2010, 17.00-20.00 uur.

Schrijf op elk blad dat u inlevert uw naam en studentnummer. Het gebruik van 'Game Theory', door H. Peters, is toegestaan, maar andere teksten of eigen aantekeningen niet.

Bewijs al uw beweringen.

Opgave 1

Een simpel kaartspel werkt als volgt. Antigone en Beatrix hebben ieder de A(as), H(eer), V(rouw) en B(oer) van respectievelijk harten en schoppen. Ze draaien tegelijkertijd een van hun kaarten om. Als ze beiden een A spelen, of als ze beiden een plaatje (=niet-Aas) spelen, maar van verschillend type, krijgt Antigone 5 mud ambrozijn van Beatrix. In andere gevallen moet juist Antigone dezelfde hoeveelheid aan Beatrix betalen.

- (a) Geef de payoff matrix P voor Antigone. Heeft het spel een zadelpunt? Zijn er gedomineerde strategiën?
- (b) Zij $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1)^T$. Volgens de stelling van von Neumann bestaat er een paar strategiën $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in \Delta^4 \times \Delta^4$ dat optimaal is ten opzichte van elkaar. Neem aan dat in \mathbf{q}^* alle zuivere strategiën met positieve kans gespeeld worden. Laat zien dat geldt: $P \mathbf{q}^* = \alpha \mathbf{1}$, voor een zekere $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (c) Merk op dat de rollen van de zuivere strategiën H , V en B symmetrisch zijn in dit spel. Op grond hiervan kunnen we aannemen dat in de optimale strategie \mathbf{q}^* deze zuivere strategiën allen met dezelfde kans gespeeld zullen worden. Leid uit dit inzicht af wat \mathbf{q}^* is en bepaal α .
- (d) Bepaal \mathbf{p}^* .

Opgave 2

De drie-koppige directie van het bedrijf Universal Utilities gaat stemmen over de vraag of ze zichzelf een salarisverhoging zullen geven. Als een meerderheid vóór stemt gaat de verhoging van 200K euro door, anders niet.

De stemming zal algemeen bekend worden. Elk lid van de directie dat vóór heeft gestemd leidt een imagoverlies ter waarde van 100K euro, ongeacht of de salarisverhoging doorgaat of niet.

De Algemeen directeur stemt eerst en maakt haar keuze aan de de beide anderen bekend. Hierna stemt de directeur Financiën en tenslotte de Public Relations manager, allebei ook in het openbaar.

- (a) Geef de "extensive form" van dit spel.
- (b) Geef de "backward induction" oplossing van dit spel (dus niet alleen de *uitkomst* !)
- (c) Geef alle Nash evenwichten in zuivere strategieën van dit spel.

Opgave 3

Beschouw het volgende bimatrix spel:

$$\begin{pmatrix} (3, 1) & (0, 1) & (1, 0) \\ (2, 1) & (2, 3) & (0, 2) \\ (2, 2) & (4, 0) & (1, 0) \end{pmatrix}$$

- (a) Elimineer alle (zuivere of gemengde) strategieën van dit spel en herhaal dit zo vaak mogelijk.
- (b) bepaal alle Nash evenwichten van dit spel.

Opgave 4

Colette verkoopt klassieke auto's. Denzel heeft z'n oog laten vallen op een Citroën DS uit 1958.

Van dit type auto's is een fractie p in prima staat en een fractie $1 - p$ is matig onderhouden. Deze informatie is bij beiden bekend. Prima auto's hebben natuurlijk een hogere waarde, dus is het voor Denzel belangrijk te weten wat de staat van de auto is voor hij een bod doet. We nemen aan dat $p = \frac{1}{2}$.

De Natuur heeft bepaald of deze specifieke auto prima of matig is.

Denzel vraagt aan Colette naar de staat van de auto. Colette antwoordt Goed (als de auto prima is) of Slecht (als de auto matig onderhouden is), maar haar antwoord hoeft niet noodzakelijk waar te zijn. Denzel besluit na het antwoord van Colette of hij een Hoog bod of een Laag bod doet.

We nemen aan dat Colette het bod aanneemt, als het conform de informatie is die zij heeft gegeven, of beter. Als ze Denzel heeft verteld dat de auto Goed is, zal ze een Hoog bod accepteren, maar niet een Laag bod. Als ze hem heeft verteld dat de auto Slecht is, zal ze zowel een Hoog als een Laag bod accepteren.

Denzel heeft een payoff van +1 als hij een prima auto voor een Hoog bod heeft gekregen, of een matige auto voor een Laag bod. Als hij een prima auto voor een Laag bod krijgt is z'n payoff +2, maar een matige auto voor een Hoog bod geeft hem een payoff van -1. Als er geen transactie is geweest (omdat z'n bod is afgewezen) is z'n payoff 0.

Colette heeft een payoff van +1 als zij een prima auto voor een Hoog bod heeft verkocht, of een matige auto voor een Laag bod. Als zij een matige auto voor een Hoog bod heeft verkocht heeft ze een payoff van +2. Een prima auto verkopen tegen een Laag bod levert haar een payoff van -1. Als er geen transactie is geweest is haar payoff 0.

Daarnaast moet van haar payoff een bedrag $r > 0$ worden afgetrokken, als blijkt dat ze niet de waarheid heeft gesproken. Denzel ontdekt natuurlijk snel genoeg of z'n auto inderdaad de kwaliteit heeft die Colette hem heeft wijs gemaakt en zo niet, dan lijdt Colette reputatieschade ter waarde van r .

- (a) Geef de "extensive form" van dit spel.
- (b) Neem $r = 0$ en bepaal alle Nash evenwichten. Geef bij elk evenwicht aan of het Perfect Bayesian is en zo ja, geef de bijbehorende "beliefs".
- (c) Bepaal een waarde van r waarvoor dit spel een "separating" evenwicht heeft. Bedenk zelf een economische moraal (maar die hoeft niet op te schrijven).