Tweede deeltentamen Speltheorie

20 Januari 2010, 14.00-17.00.

Schrijf je naam en studentnummer op elk blad dat je inlevert. Het gebruik van 'Game Theory' van H. Peters is toegestaan.

Opgave 1

Beschouw een *bargaining* spel waarbij de eerste speler een *utility* $u_1(s) = s^\alpha$ heeft en de tweede speler een *utility* $u_2(t) = t^\beta$, met $0 < \alpha$, $\beta < 1$ en het *disagreement point* is $d = (0,0)$.

(a) Zij (S,d) het *bargaining* probleem dat gedefinieerd wordt door deze *utilities*, in de zin van Hoofdstuk 10.1 uit Peters. Schets de *feasible set* van (S,d), met $\alpha = 1/2$ en $\beta = 1/3$.

(b) Neem nu aan dat de spelers een Rubinstein *alternating offers* procedure volgen, met *discount factor* $0 < \delta < 1$. Het is bekend dat dit er toe leidt dat speler 1 een voorstel (x_1, x_2) doet en speler 2 het voorstel (y_1, y_2).
N.B.: x_1 en x_2 zijn de *utilities* die speler 1, respectievelijk 2, in dit voorstel krijgen. Hierbij liggen (x_1, x_2) en (y_1, y_2) op de Pareto optimal set van S. Bovendien geldt dat $x_2 = \delta y_2$ en $y_1 = \delta x_1$. Tenslotte weten we dat het voorstel van speler 1 wordt aangenomen.
Zij α en β willekeurig, $0 < \alpha$, $\beta < 1$. Bepaal de uitkomst (x_1, x_2) in termen van α, β en δ.

(c) Bepaal $lim_{\delta \to 1} x_1$. Laat zien dat deze limiet overeen komt met de *Nash bargaining solution*.

Opgave 2

Beschouw het volgende, symmetrische, 2×2 spel met payoff matrix voor speler 1:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

met $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. De payoffs voor speler 2 worden gegeven door de gespiegelde matrix A^T.

(a) Bepaal de replicator vergelijking.

(b) Voor welke waarden van $\lambda > 0$ heeft de vergelijking precies twee vaste punten? teken het bijbehorende fase-plaatje.

(c) Voor welke waarden van $\lambda > 0$ is $(1,0)$ een ESS? Bewijs je bewering.

Opgave 3

Beschouw het *TU* spel (N, ν) dat gedefinieerd wordt door: $N = \{1, 2, 3\}$, en de *payoffs*: $\nu(\{1\}) = 0$, $\nu(\{2\}) = 0$, $\nu(\{3\}) = 1$, $\nu(\{1,2\}) = 7$, $\nu(\{1,3\}) = 5$, $\nu(\{2,3\}) = 3$ en $\nu(N) = 10$.

(a) Bepaal de *core* van dit spel. Teken een driehoek die de voorwaarde $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ representeert. Geef in deze driehoek grafisch aan welke condities de core bepalen.

(b) Bepaal de *Shapley value* van dit spel.

(c) Bereken de *nucleolus* van dit spel.