

TWEEDE DEELTENTAMEN SPELTHEORIE

19 januari 2011 , 13.30-16.30

Universiteit Utrecht, Mathematisch Instituut

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
 - Het gebruik van het boek "Game Theory" van H. Peters (zonder aantekeningen) en een rekenmachine zijn toegestaan.
 - Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
 - Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je er aan komt.
-

Opgave 1, 30 pt.

We beschouwen een *veiling* voor een bepaald object. Aan de veiling doen $n \geq 2$ potentiële kopers mee. Iedere koper heeft een bepaalde waarde $0 \leq v_i \leq 1$ die hij of zij aan het object hecht. Deze *valuations* v_i zijn privé informatie. Wel is bekend dat de v_i uniform verdeeld zijn op $[0, 1]$, d.w.z: $Pr(v_i \leq x) = x$, voor alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

De veiling is van het type *first-price sealed bid*. Iedere deelnemer schrijft z'n bod op een briefje en levert dat in bij de veilingmeester. Deze bepaalt wat het hoogste bod is en de bijbehorende bidder krijgt het object, tegen de prijs die hij heeft geboden. We gaan er van uit dat de kans dat er twee bidders zijn met het hoogste bod, gelijk is aan nul. In deze opgave ga je bepalen wat de optimale biedstrategie is, voor elke koper.

- (a) (5 pt.) Neem aan dat de biedstrategie voor koper i de vorm heeft

$$b_i(v) = a_i v.$$

In woorden: als het object voor koper i een waarde v vertegenwoordigt, dan biedt hij $b_i = a_i v$. Bereken dat $a_i = a$ voor alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Bereken ook dat $0 \leq a \leq 1$.

- (b) (5 pt.) Zij $x \in [0, 1]$. Laat zien dat $Pr(b_j < x) = x/a$, voor alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- (c) (10 pt.) Stel koper i biedt x . Bereken dat de kans dat hij de veiling wint gelijk is aan $(x/a)^{n-1}$.

- (d) (10 pt.) Uit bovenstaande volgt dat als koper i met privé-waardering v_i het bedrag x biedt, zijn verwachte payoff gelijk is aan

$$(v_i - x)(x/a)^{n-1}.$$

Bepaal voor welke $x \in [0, 1]$ bovenstaande uitdrukking z'n maximum heeft en bepaal hieruit de waarde van a . Bepaal de limietwaarde van a als $n \rightarrow \infty$.

Opgave 2, 30 pt.

Beschouw het TU spel (M, ξ) dat gedefinieerd wordt door: $M = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, en de *payoff*-functie: $\xi(S) = f(|S|)$. Hierbij geeft $|S|$ het aantal elementen aan van S . De functie $f(x)$ is strikt stijgend.

- (a) (5 pt.) Welke verdeling van de payoff voor de *grand coalition* zou je eerlijk vinden, gegeven het feit dat alle spelers gelijkwaardig zijn?
- (b) (15 pt.) Beredeneer dat de totale marginale contributie van een willekeurige speler $i \in M$ gelijk is aan:

$$f(1)(n-1)! + (n-1)[f(2) - f(1)](n-2)! + \dots + (n-1)[f(n) - f(n-1)].$$

- (c) (10 pt.) Laat zien dat uit onderdeel b) volgt dat de Shapley waarde van dit spel de eerlijke verdeling van onderdeel a) oplevert.

Opgave 3, 25 pt.

Beschouw het symmetrische 2×2 matrix spel met payoff matrix voor speler 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

De payoff-matrix voor speler 2 wordt gegeven door $B = A^T$, de gespiegelde van A .

- (a) (5 pt.) Bepaal de symmetrische Nash evenwichten van dit spel.
- (b) (10 pt.) Bepaal voor elk van deze evenwichten of het ESS zijn, *zonder gebruik te maken van Proposition 8.6*.
- (c) (10 pt.) Bepaal de replicatorvergelijking voor dit spel en teken het faseplaatje.

Opgave 4, 15 pt.

We beschouwen een bargaining spel waarbij speler 1 de utility functie $u_1(x) = x$ heeft en speler 2 de utility functie $u_2(x) = \lambda x$, met $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Ze verdelen 1 eenheid van een goed en het *disagreement punt* is $(0, 0)$.

- (a) (5 pt.) Bepaal de *Nash bargaining* oplossing, uitgedrukt in de hoeveelheid van het goed dat ieder krijgt en uitgedrukt in de bijbehorende *utilities*.
- (b) (5 pt. of 1 pt.) Stel je mag met een andere spelers zes fiches verdelen. Jij kan elk fiche inruilen voor 100 euro, je tegenstander kan elk fiche inruilen voor 200 euro. Zou je een verdeling van ieder drie fiches accepteren? Zo ja, dan heb je er ook geen bezwaar tegen om voor deze vraag maar 1 punt te krijgen. Zo nee, welke verdeling zou je voorstellen?
- (c) (5 pt. of 1 pt.) Vind je een tegenspraak tussen onderdeel a) en b)? Zo niet, dan accepteer je ongetwijfeld dat je maar 1 punt voor deze vraag krijgt. Zo ja, welke verdeling vind je redelijk in de situatie van a)?