Eerste deeltentamen Speltheorie

9 November, 2011, 13.30-16.30 uur.

Schrijf op elk blad dat u inlevert uw naam en studentnummer. Het gebruik van 'Game Theory', door H. Peters, is toegestaan, maar andere teksten of eigen aantekeningen niet.
Bewijs al uw beweringen.

Opgave 1
Een klant heeft een conflict met een bedrijf. Om daar iets aan te doen kan hij een procedure starten. Dit kost hem in ieder geval p euro. Als hij de procedure begint, doet hij een schikkingsvoorstel aan het bedrijf. Dat wil zeggen, hij noemt een bedrag van s euro dat het bedrijf hem zou moeten betalen. Als het schikkingsvoorstel wordt aangenomen door het bedrijf is de procedure afgelopen.
Als het bedrijf de schikking afwijst, heeft de klant de optie om de procedure te staken, of een geding tegen het bedrijf aan te spannen. In het geval van een geding, kan de klant verwachten dat de rechter hem een bedrag van g euro toewijst, te betalen door het bedrijf. Wel is de klant nog eens k euro kwijt aan advocaten kosten. In het geval van een geding, maakt het bedrijf ook nog j euro aan juridische kosten.
Als de klant geen procedure start, is de payoff voor zowel de klant als het bedrijf 0 (nul). Tenslotte nemen we aan dat $g < k$.

(a) Teken de extensive form van de procedure. Bepaal met *backward induction* het *subgame perfect* evenwicht. Geef niet alleen de uitkomst, maar ook de strategiën van de klant en van het bedrijf.

(b) We wijzigen de procedure nu als volgt. Als de klant een procedure begint, dan huurt hij direct al een advocaat in, voor dezelfde vaste kosten van k euro. Dit bedrag is de klant dus ook kwijt als hij geen geding begint. Bepaal een voorwaarde, uitgedrukt in de parameters p, g, k en j, zodat er een *subgame perfect* evenwicht bestaat waarin de klant een procedure begint en het bedrijf de schikking aanvaardt.

(c) Bepaal in dit geval dat *subgame perfect* evenwicht (alweer, inclusief de strategiën).

Opgave 2
Zij gegeven een spel met speler verzameling $N = \{1, 2\}$, strategie verzamelingen S_1 en S_2 en payoff functies $u_i(s_1, s_2)$, $i = 1, 2$.

Definitie 1. Als voor elk tweetal paren $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ en $(s_1', s_2') \in S_1 \times S_2$ geldt dat $u_1(s_1, s_2) > u_1(s_1', s_2')$ dan en slechts dan als $u_2(s_1, s_2) < u_2(s_1', s_2')$, dan noemen we het spel *strikt competitief*.

Definitie 2. Een strategie $\bar{s}_i \in S_i$ heet een *veiligheidsstrategie* voor speler i, als $s_i = \bar{s}_i$ de functie $w_i(s_i) = min_{s_j \in S_j} u_i(s_i, s_j)$ maximaliseert.

Bewijs de volgende stelling:
Voor een competitief spel geldt dat als (s_1^*, s_2^*) een Nash evenwicht is, dan is s_i^* een veiligheidsstrategie voor speler i, $i = 1, 2$.

Opgave 3
Beschouw het volgende bimatrix spel:

$$\begin{pmatrix} (0,2) & (3,1) & (-4,1) \\ (3,-1) & (6,0) & (-3,1) \\ (0,4) & (3,3) & (0,4) \end{pmatrix}$$

(a) Elimineer alle strategiën die gedomineerd worden door andere (zuivere of gemengde) strategiën en herhaal dit zo vaak mogelijk.

(b) bepaal alle Nash evenwichten van dit spel.

Opgave 4
Henk is een boze man, die zich graag afreageert door in café Zusemezo ruzie te zoeken met klanten. De klanten van het café zijn van het type Slapjanus òf van het type Keihard. Als Henk ruzie krijgt met een Keiharde, dan loopt het niet best voor hem af, maar tegen een Slapjanus wint hij makkelijk.
De Keiharde types drinken het liefst bourbon whiskey (geen ijs), terwijl Slapjanussen een voorkeur voor melk hebben. Het is bekend dat een fractie $0 \leq \alpha \leq 1$ van de klanten van het type Keihard is.
De aggressie van Henk is alom bekend, waardoor klanten soms niet de drank van hun voorkeur bestellen, in een poging Henk om de tuin te leiden. Dat doet natuurlijk wel af aan het plezier van hun avondje uit.
Henk kan dus Ruzie maken of Niet en een klant kan Bourbon bestellen of Melk. De payoffs zijn dan als volgt. Als Henk ruzie zoekt met een Slapjanus, dan levert hem dat +3 op en de klant ervaart dit als -2. Als Henk ruzie zoekt met een Keiharde, dan krijgt hij -1 en de klant +1. Als Henk geen ruzie zoekt levert dat beide partijen 0 op. Een klant die een ander drankje dan zijn lievelingsdrank bestelt, moet nog eens 1 van zijn payoff aftrekken.

(a) Geef de extensive form van dit spel.

(b) Neem $\alpha = 1/2$ en bepaal alle Nash evenwichten in zuivere strategiën. Onderzoek bij elk evenwicht of het Perfect Bayesian is en zo ja, geef de bijbehorende beliefs. Geef ook bij elk evenwicht aan of het pooling of separating is.

(c) Als er alleen Slapjanus types naar het café komen, dan is dit een extensive form spel met complete informatie geworden. Bepaal in dit geval met behulp van Backward Induction de uitkomst. Doe hetzelfde voor het geval er alleen Keiharden komen.