Tentamen Speltheorie
29 januari 2013.

Opgave 1

Beschouw het coöperatieve spel (N, ν), met $N = \{1, 2, 3\}$. De waarden van ν zijn: $\nu(\emptyset) = 0$, $\nu(\{1\}) = 0$, $\nu(\{2\}) = 0$, $\nu(\{3\}) = 0$, $\nu(\{1, 2\}) = \alpha$, $\nu(\{1, 3\}) = \beta$, $\nu(\{2, 3\}) = 1$ en $\nu(\{1, 2, 3\}) = 1$. Hierbij zijn $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$. Zij $C = C(N, \nu)$ de kern van dit spel.

(a) Beredeneer dat als $\mathbf{x} \in C$, dan is $x_1 = 0$.

(b) Voor welke waarden van α en β is $C \neq \emptyset$?

(c) Geef een uitdrukking voor C. Laat zien dat C een lijnstuk is, als C niet leeg is.

(d) Beredeneer dat bij afwezigheid van speler 1, dit spel niets anders is dan het *bargaining* spel uit H 6.7. Wat is de uitkomst van het bargaining spel met oneindige horizon ($T = \infty$) en $\delta \to 1$, waarbij δ de discountfactor is?

(e) Bereken de Shapley waardes van (N, ν). Welke speler krijgt in deze verdeling het minst en welke speler het op één na minst?

(f) BONUS: bedenk een situatie, economisch of anderszins, die gemodelleerd kan worden met het spel (N, ν) en waarbij het gerechtvaardigd kan worden dat speler 1 toch iets krijgt in de eindafrekening, zoals in de Shapley verdeling.

Opgave 2

Beschouw een zogenaamde 'all pay auction' met twee deelnemers, waar 3 miljoen euro wordt geveild. Beide spelers doen een bod op de prijs van 3 miljoen euro. Uiteraard weten ze niet van elkaar hoeveel ze bieden. De hoogste bieder krijgt de 3 miljoen euro. Als de boden van de deelnemers gelijk zijn, krijgen ze ieder 1,5 miljoen euro. Beide deelnemers zijn in alle gevallen wel hun bod kwijt, dus ook degene die de prijs niet krijgt. We beperken de mogelijke boden van de spelers tot de verzameling $\{0, 1, 2\}$ (in miljoenen).

(a) Dit spel is een bimatrix spel. Geef de payoff matrices.

(b) Laat zien dat er geen Nash evenwichten in zuivere strategieën zijn.

(c) Stel dat de kolom speler van een bimatrix spel (A, B) een strategie p^* speelt met

$$EIGENSCHAP: \quad (Ap^*)_1 = (Ap^*)_2 = \ldots = (Ap^*)_n$$

(alle componenten van Ap^* zijn gelijk). Laat zien dat dan p^* een best reply is voor de rij-speler.

(d) Laat zien dat als een bimatrix spel symmetrisch is, dus van de vorm (G, G^t), waarbij G^t de gespiegelde is van G, dan is (p^*, p^*) een Nash evenwicht, voor elke p^* die voldoet aan $EIGENSCHAP$.

(e) Gebruik onderdeel (d) om een Nash evenwicht van het All Pay Auction spel te berekenen.

Exercise 3

Het Landeigenaarspel (M, ν) wordt gedefinieerd door $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ en

$$\nu(S) = \begin{cases} f(|S| - 1) & \text{als } 1 \in S \\ 0 & \text{als } 1 \notin S \end{cases},$$

waarbij $f(n)$ een strikt stijgende functie is met $f(0) = 0$. Het idee is dat alleen coalities waar speler 1 (de landeigenaar) deel van uitmaakt een positieve payoff krijgen. De spelers $\{2, \ldots, m\}$ zijn de boeren. Merk op dat de payoff voor een coalitie waar de landeigenaar deel van uitmaakt verder alleen afhangt van het aantal boeren dat meedoet.

(a) Stel $f(n) = n$ en $m = 3$. Bepaal de Shapley waardes van alle spelers.

(b) Stel $f(n) = n$ en $m = 3$. Bepaal de nucleolus.

(c) Stel $f(n)$ en m willekeurig. Laat zien dat de Shapleywaarde van speler 1 gelijk is aan:

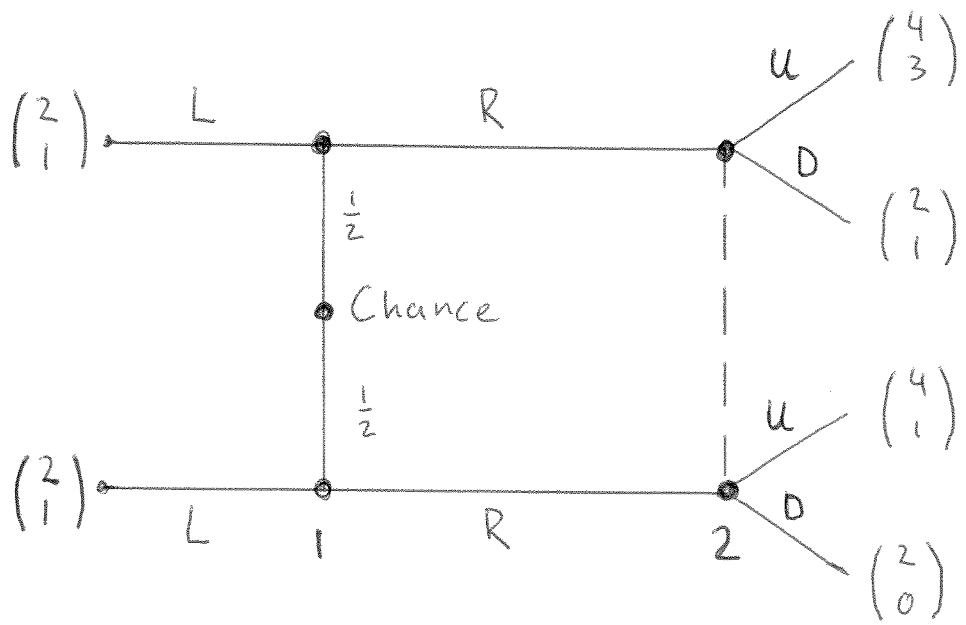
$$\Phi_1(M, \nu) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{n=m-1} f(n).$$

Bereken deze waarde in het geval $f(n) = n$.

(d) Stel $f(n)$ en m willekeurig. Bepaal de Shapleywaarde voor elke boer. Hint: gebruik een symmetrieargument.

Exercise 4

Beschouw onderstaand extensive form spel.



(a) Geef de strategieverzameling van speler 1 en van speler 2.

(b) Geef de normaalvorm van het spel en bepaal alle Nash evenwichten in zuivere strategieën.

(c) Geef bij elk gevonden Nash evenwicht aan of het een Perfect Bayesian Evenwicht is. In het geval het evenwicht PBE is, geef de bijbehorende beliefs.