Uitwerking Tweede Quiz Speltheorie, 28-11-2012

Attentie! Maak van de onderstaande drie opgaven er slechts twee naar eigen keuze!

Opgave 1 [50 pt]. Van het tweepersoons nulsomspel met de 2×4-uitbetalingsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

is uit sectie 2.2.3 van het boek bekend dat de unieke gemengde evenwichtsoplossing gevormd wordt door $\bar{\mathbf{p}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en $\bar{\mathbf{q}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$. N.B.: dit hoeft niet nogmaals te worden afgeleid.

a. [10 pt] In welke zin is het LP-probleem om $-x_3$ te minimaliseren over de verzameling V van alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ met $10x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 0$, $2x_1 + 10x_2 - x_3 \geq 0$, $5x_1 + 8x_2 - x_3 \geq 0$, $x_1 + 12x_2 - x_3 \geq 0$ en $-x_1 - x_2 \geq -1$ nauw verbonden met het probleem voor speler 1 om de waarde $\nu_1(A)$ van het spel te bepalen?

b. [10 pt] Bewijs volledig uit basisprincipes (dus zonder stellingen over dualiteit e.d. aan te roepen) het verband dat je al in onderdeel a hebt aangegeven.

c. [10 pt] Neem het minimaliseringsprobleem uit onderdeel a als primaal LP-probleem. Formuleer het bijbehorende duale LP-probleem. Geef en bewijs het verband van dat probleem met het probleem voor speler 2 om de waarde $\nu_2(A)$ te bepalen.

d. [10 pt] Wat geeft de LP-dualiteitsstelling concreet als je hem toepast op het primale en duale probleem uit onderdeel c? Wat betekent dit in termen van het oorspronkelijke spel?

e. [10 pt] Bewijs m.b.v. de vorige onderdelen dat bovenstaande vectoren $\bar{\mathbf{p}}$ en $\bar{\mathbf{q}}$ een evenwichtsoplossing vormen voor het spel door te laten zien dat ze aan een zekere dualiteitsrelatie voldoen.

Opgave 2 [**60** pt] Zij $G = (N, S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n)$ een eindig spel. **Definitie.** Een strategiecombinatie $\bar{\sigma} \in \Pi_{i=1}^n \Delta(S_i)$ heeft *eigenschap* (*) als het volgende geldt:

Er bestaat een rij foutfuncties $\{\mu^t\}_{t=1}^\infty$ *met* $\lim_{t\to\infty} \mu_i^t(h) = 0$ *voor elke* i *en elke* $h \in S_i$ *en er bestaat een rij van strategiecombinaties* $\{\sigma^t\}_{t=1}^\infty$ *in* $\Pi_{i=1}^n \Delta(S_i)$ *zo dat*
(i) $\sigma^t \to \bar{\sigma}$ *voor* $t \to \infty$,
(ii) voor elke t *is* σ^t *een Nash evenwicht voor het gebruikelijke* μ^t*-geperturbeerde spel* $G(\mu^t)$.

a. [15 pt] Bewijs: elk volledig gemengd (= completely mixed) Nash evenwicht $\bar{\sigma}$ voor het spel G heeft eigenschap (*).

b. [25 pt] Bewijs: Als $\bar{\sigma}$ eigenschap (*) heeft, dan moet $\bar{\sigma}$ een Nash evenwicht zijn voor het oorspronkelijke spel G. *Aanwijzing:* Laat eerst zien dat voor elke volledig gemengde strategiecombinatie σ voor het spel G geldt $u_i(\bar{\sigma}) \geq u_i(\sigma)$ voor alle $i = 1, \ldots, n$.[1]

c. [20 pt] Beschouw het tweepersoons-spel met de volgende bimatrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,100 & 0,100 \\ -10,-10 & 40,40 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bepaal voor dit spel alle Nash evenwichten en alle trembling hand perfect Nash evenwichten (zoals gebruikelijk in gemengde strategieën, waarbij zuivere strategieën ook meetellen als – speciale – gemengde stategieën)).

Opgave 3 [50 pt] Beschouw een tweepersoonsspel met $m \times n$ bimatrix (A, B). Beschouw ook het volgende optimaliseringsprobleem: maximaliseer $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, a, b) := \mathbf{p}A\mathbf{q} + \mathbf{p}B\mathbf{q} - a - b$ over alle $\mathbf{p} \in \Delta^m$, $\mathbf{q} \in \Delta^n$, $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ waarvoor $\mathbf{e}^i A\mathbf{q} \leq a$, $i = 1, \ldots, m$ en $\mathbf{p}B\mathbf{e}^j \leq b$, $j = 1, \ldots, n$. Bewijs: $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{a}, \bar{b})$ is een optimale oplossing van dit probleem dan en slechts dan als $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$ een Nash evenwicht is en $\bar{a} = \bar{\mathbf{p}}A\bar{\mathbf{q}}$, $\bar{b} = \bar{\mathbf{p}}B\bar{\mathbf{q}}$.