Uitwerking Herkansingstentamen Speltheorie, 13-3-2013

Schrijf en redeneer vooral duidelijk, want er wordt streng nagekeken: vaagheden e.d. **leiden zonder meer tot puntenverlies**. Alle drie opgaven zijn verplicht bij dit tentamen.

Opgave 1 [35 pt] Beschouw het tweepersoonsspel waarvan de uitbetalingen in onderstaande bimatrix staan:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a. [5pt] Bepaal alle Nash evenwichten (inclusief eventuele gemengde Nash evenwichten) van dit spel.
b. [2pt] In hoofdstuk 13 van het boek is, in algemene termen, het begrip "(weakly) dominated mixed strategy" ingevoerd, evenals het erop gebaseerde begrip "undominated mixed strategy". Vertaal deze definitie naar het huidige eenvoudige spel, zodat goed duidelijk wordt gemaakt wat een ongedomineerde (d.w.z "undominated") gemengde strategie is *in termen van het huidige spel*.
c. [7pt] Bepaal, rechtstreeks vanuit de definitie uit het vorige onderdeel, de verzameling van ongedomineerde Nash evenwichten (inclusief eventuele gemengde evenwichten) van dit spel.
d. [2pt] Vermeld duidelijk wat, *vertaald naar het huidige spel*, de definitie van een *perfect* gemengd evenwicht is. N.B. Bedoeld is het begrip "trembling hand perfect equilibrium" zoals dat in hoofdstuk 13 van het boek is ingevoerd.
e. [7pt] Bepaal met behulp van de definitie uit het vorige onderdeel de verzameling van alle perfecte gemengde evenwichten van dit spel.
f. [4pt] Beschouw nu het tweepersoonsspel waarvan de uitbetalingen in onderstaande bimatrix staan:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & R & ER \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \\ EB \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 & -3,-3 \\ 0,0 & 0,0 & -1,-1 \\ -3,-3 & -1,-1 & -1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bepaal van dit tweede spel alle *zuivere* Nash evenwichten.
g. [8pt] Bepaal van dit tweede spel de verzameling van alle zuivere Nash evenwichten die zowel perfect als ongedomineerd zijn.

Opgave 2 [30 pt] Beschouw een veilingspel met volledige informatie over waarderingen van een te veilen object. Het spel lijkt sterk op dat uit sectie 6.5.1, maar verschilt toch op één punt, zodat resultaten uit sectie 6.5.1. van het boek *niet* zonder verdere uitleg van toepassing zijn.

Net als in het boek heeft het spel volledige informatie en verzegelde biedingen $b_i \geq 0$. Elke speler i, $1 \leq i \leq n$, (er geldt $n \geq 2$) heeft waardering (=valuation) v_i voor het te veilen object. Net als in sectie 6.5.1 zijn de waarderingen geordend: $v_1 \geq \cdots \geq v_n > 0$. Als slechts één speler het hoogste bod uitbrengt, dan krijgt die speler het object toegewezen tegen betaling van het door hem/haar geboden bedrag. Indien meerdere (zeg $r \geq 2$) spelers het hoogste bod uitbrengen, dan vindt de toewijzing van het object plaats op een andere manier dan in sectie 6.5.1, namelijk door met gelijke kansen te loten onder de hoogste bieders. Daarbij kiezen we de verwachtingswaarde van deze loterij als uitbetaling; dus we definiëren $u_i(b_1, \ldots, b_n) := \frac{1}{r}(v_i - b_i)$ voor elke hoogst biedende speler i.

Zij $\bar{\mathbf{b}} := (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$ een *willekeurig* Nash evenwicht voor dit spel.

a. [6 pt] Toon aan: als onder $\bar{\mathbf{b}}$ speler i tot de groep hoogst biedende spelers behoort, dan geldt $\bar{b}_i \leq v_i$.
b. [8 pt] Toon aan: onder $\bar{\mathbf{b}}$ kunnen alleen spelers i met $v_i = v_1$ tot de groep hoogst biedende spelers behoren.
c. [8 pt] Stel dat geldt $v_1 = v_2 > v_3 \geq \ldots \geq v_n$. Omschrijf dan de biedingen $\bar{b}_1$ en $\bar{b}_2$ zo nauwkeurig mogelijk (inclusief afleiding).
d. [8 pt] Stel dat geldt $v_1 > v_2 \geq \ldots \geq v_n$. Bepaal dan de verzameling van alle Nash evenwichten voor dit spel (inclusief afleiding).

Opgave 3 [35 pt] Zij $N := \{1, 2, 3\}$ een coöperatief spel waarvan de waardefunctie $v(S)$ wordt vastgelegd door het volgende gegeven: $v(S)$ is gelijk aan 1 voor de volgende drie coalities S: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ en $\{1, 2, 3\}$; voor alle andere coalities S is $v(S)$ gelijk aan 0.

a. [3 pt] Bepaal voor dit spel de verzameling van alle veto-spelers en ook de verzameling van alle dictatoren.
b. [10 pt] Bepaal voor dit spel de dominantie-core $DC(v)$, d.w.z. de verzameling van alle niet-gedomineerde imputaties, *rechtstreeks* vanuit de definitie van niet-gedomineerd zijn.
c. [7 pt] Bepaal voor dit spel de core $C(v)$.
d. [10 pt] Toon aan dat $V := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 = x_3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ een verzameling van imputaties is, die de volgende twee eigenschappen (i) en (ii) heeft: (i) geen enkel element uit die verzameling wordt gedomineerd door een ander element uit die verzameling, (ii) elke imputatie die niet tot die verzameling behoort, wordt gedomineerd door een element uit die verzameling.
e. [5 pt] Controleer (met uitleg) ook of de verzameling $DC(v)$ wel of niet de twee bovengenoemde eigenschappen (i) en (ii) heeft.