Uitwerking eindtentamen Speltheorie van 16-1-2013

Lees dit zorgvuldig! Schrijf en redeneer vooral duidelijk, want vaagheden, meerdere interpretatiemogelijkheden, etc. leiden zonder meer tot puntenverlies. Het bij dit college gebruikte boek is hiervoor maatgevend en i.h.b. worden zuivere strategiecombinaties beschouwd als (speciale) gemengde strategiecombinaties! “Zuiver” heeft dus een andere betekenis dan “niet gemengd”! Opgaven 1 en 2 zijn verplicht bij dit tentamen, **maar van de opgaven 3 (gemakkelijker, 30 pt) en 4 (iets lastiger, 35+15 extra pt) mag je zelf kiezen welke opgave je wilt inleveren** (beide inleveren is zinloos, want ~~dan telt alleen de eerst gemaakte opgave~~).

Opgave 1 [35 pt] Beschouw het tweepersoonsspel in uitgebreide vorm dat in onderstaande figuur is weergegeven:

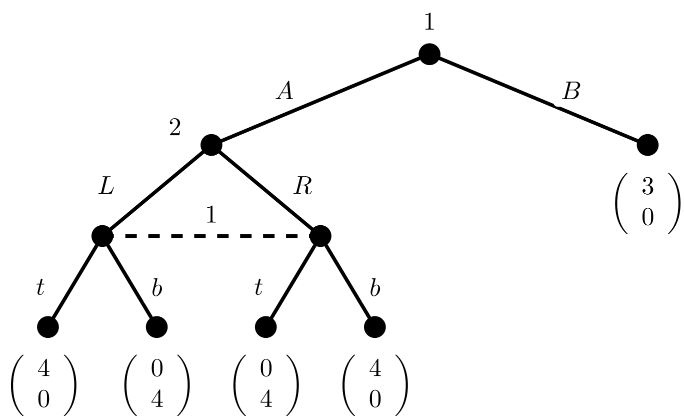

Figure 1: Spel in uitgebreide vorm – opgave 1

a. [10 pt] Formuleer de strategische vorm versie van dit spel, conform wat het boek voorschrijft.

b. [7.5 pt] Bepaal de verzameling van alle zuivere Nash evenwichten.

c. [7.5 pt] Bepaal vervolgens de verzameling van alle gemengde Nash evenwichten.

d. [10 pt] Wat zijn de deelspelen van dit spel? Bepaal hiermee de verzameling van alle gemengde deelspel-perfecte Nash evenwichten.

Opgave 2 [35 pt] Beschouw het veilingspel “first price sealed-bid auction” uit sectie 6.5.1 met volledige informatie en verzegelde biedingen $b_i \geq 0$, waarin elke speler i, $1 \leq i \leq n$ (er geldt $n \geq 2$), de waardering (=valuation) $v_i \geq 0$ heeft voor het te veilen object. Net als in sectie 6.5.1 zijn de waarderingen geordend: $v_1 \geq \cdots \geq v_n$. Als slechts één speler het hoogste bod $\hat{b} := \max(b_1, \ldots, b_n)$ uitbrengt, dan krijgt die speler het object toegewezen tegen betaling van het door hem/haar geboden bedrag. Indien meerdere spelers het bod $\hat{b}$ uitbrengen vindt de toewijzing, zoals in sectie 6.5.1 uitgelegd, plaats aan die hoogst biedende speler i die de laagste index i heeft.

a. [5 pt] Geef twee zelf gekozen voorbeelden van een Nash evenwicht voor dit spel en leg duidelijk uit waarom die elk van die keuzes een NE voorstelt.

Vanaf nu is $\bar{\mathbf{b}} := (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$ een *willekeurig* Nash evenwicht voor dit spel.

b. [7.5 pt] Bewijs: als speler i het object toegewezen krijgt onder $\bar{\mathbf{b}}$, dan geldt $\bar{b}_i \leq v_i$.

c. [7.5 pt] Geldt de ongelijkheid $\bar{b}_i \leq v_i$ ook als speler i het object *niet* toegewezen krijgt onder het NE $\bar{\mathbf{b}}$? Zoja, geef dan een sluitend bewijs; zonee, geef dan een tegenvoorbeeld met bijbehorende uitleg.

d. [7.5 pt] Bewijs: onder het NE $\bar{\mathbf{b}}$ wordt het object altijd toegewezen aan een speler i met $v_i = \hat{v}$; hier $\hat{v} := \max(v_1, \ldots, v_n)$. *Aanwijzing:* Het kan helpen om eerst het speciale geval $v_1 > v_2 \geq v_3 \geq \cdots$ te analyseren.

e. [7.5 pt] Bewijs: als speler i een bod $b_i \geq v_i$ uitbrengt, dan is die keuze *zwak* gedomineerd (het begrip “zwak gedomineerd” is vooral bij de behandeling van Chapter 13 aan de orde geweest). Bewijs ook: als speler i een bod $b_i < v_i$ uitbrengt, dan is die keuze niet zwak gedomineerd.

Opgave 3 [30 pt] Beschouw het Cournot spel met n firma's. Als elke firma i een hoeveelheid $q_i \geq 0$ van het productiegoed afzet, dan is de marktprijs van het productiegoed $p = \max(a - Q, 0)$ Euro's per eenheid. Hier is $a > 0$ een gegeven parameter en $Q := \sum_{i=1}^{n} q_i$. Verder wordt verondersteld dat voor elke firma het produceren van één eenheid van het productiegoed c Euro's kost, met $0 \leq c < a$.

a. [7.5 pt] Formuleer het bijbehorende spel in strategische vorm.

b. [7.5 pt] Bepaal voor elke speler de beste reactiefunctie. *Aanwijzing:* hier is het handig om de notatie $Q_{-j} := \sum_{i, i \neq j} q_i = Q - q_j$ te gebruiken.

c. [5 pt] Bepaal een Nash evenwicht waarbij alle firma's precies dezelfde hoeveelheid van het productiegoed afzetten.
d. [10 pt] Bepaal de verzameling van alle zuivere Nash evenwichten voor dit spel. Bepaal vervolgens ook de verzameling van alle gemengde Nash evenwichten.

Opgave 4 [**35 pt+15 pt extra**] Zij (N, v),met $N := \{1, \ldots, n\}$ en $v : 2^N \to \mathbb{R}$ een gebruikelijk TU-spel. Zij $I(v)$ de verzameling van imputaties (=imputations) voor dit coöperatieve spel.

a. [15 pt] Formuleer, uitsluitend in termen van v en zijn waarden, een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het leeg zijn van $I(v)$ en bewijs dat deze voorwaarde noodzakelijk en voldoende is. Geef ook een concreet voorbeeld van een spel (N, v) waarin je expliciet controleert dat die voorwaarde noodzakelijk en voldoende is.
b. [20 pt] Stel dat $I(v) \neq \emptyset$. Voor elke $i = 1, \ldots, n$ vormt men de vector $\tilde{\mathbf{x}}^i \in \mathbb{R}^n$, gegeven door $\tilde{x}_j^i := v(j) := v(\{j\})$ als $j \neq i$ en $\tilde{x}_i^i := v(N) - \sum_{k, k \neq i} v(k)$. Bewijs dan dat $I(v)$ het convex omhulsel conv W is van de verzameling W gevormd door de vectoren $\tilde{\mathbf{x}}^1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}^n$. Geef ook een concreet voorbeeld van een spel met $I(v)$ bestaande uit minstens twee elementen, waarin je de bovenstaande identiteit expliciet controleert
c. *Voor maximaal 15 extra punten:* Stel vanaf nu dat het spel (N, v) *simpel* is. Zij veto(v) de gebruikelijke notatie voor de verzameling van alle veto spelers. Bewijs de volgende drie uitspraken (die samen een stelling uit het boek opmaken), waarbij je alle daaraan voorafgaande resultaten, m.n. over core en dominantie-core, mag gebruiken:

(i) de core $C(v)$ van het spel is precies gelijk aan het convexe omhulsel van $\{\mathbf{e}^i : i \in \text{veto}(v)\}$,

(ii) onder de voorwaarden (1) veto$(v) = \emptyset$ en (2) speler k is de unieke speler i met $v(i) = 1$, geldt dat $C(v)$ leeg is en dat de dominantie-core $DC(v)$ gelijk is aan $\{\mathbf{e}^k\}$.

(iii) als minstens één van de voorwaarden (1) en (2) in onderdeel (ii) *niet* is vervuld, dan geldt $C(v) = DC(v)$.