Uitwerking eindtentamen Speltheorie van 16-1-2013

Lees dit zorgvuldig! Schrijf en redeneer vooral duidelijk, want vaagheden, meerdere interpretatiemogelijkheden, etc. leiden zonder meer tot puntenverlies. Het bij dit college gebruikte boek is hiervoor maatgevend en i.h.b. worden zuivere strategiecombinaties beschouwd als (speciale) gemengde strategiecombinaties! "Zuiver" heeft dus een andere betekenis dan "niet gemengd"! Opgaven 1 en 2 zijn verplicht bij dit tentamen, **maar van de opgaven 3 (gemakkelijker, 30 pt) en 4 (iets lastiger, 35+15 extra pt) mag je zelf kiezen welke opgave je wilt inleveren** (beide inleveren is zinloos, want ~~dan telt alleen de eerst gemaakte opgave~~).

Opgave 1 [35 pt] Beschouw het tweepersoonsspel in uitgebreide vorm dat in onderstaande figuur is weergegeven:

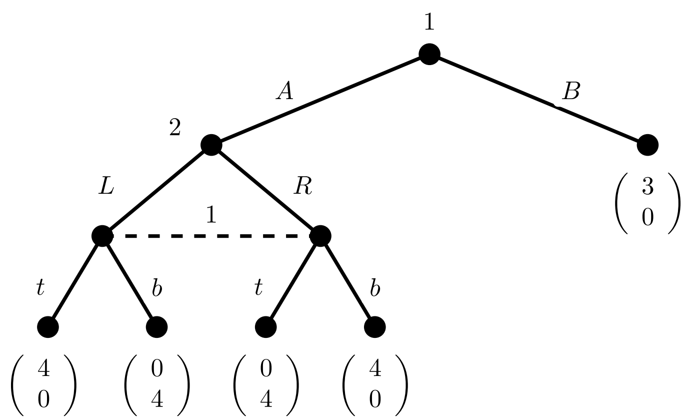

Figure 1: Spel in uitgebreide vorm – opgave 1

a. [10 pt] Formuleer de strategische vorm versie van dit spel, conform wat het boek voorschrijft.

b. [7.5 pt] Bepaal de verzameling van alle zuivere Nash evenwichten.

c. [7.5 pt] Bepaal vervolgens de verzameling van alle gemengde Nash evenwichten.

d. [10 pt] Wat zijn de deelspelen van dit spel? Bepaal hiermee de verzameling van alle gemengde deelspel-perfecte Nash evenwichten.

Oplossing. a. Speler 1 heeft twee informatieverzamelingen, n.l. de verzameling gevormd door de wortel W_1 van de gehele spelboom en de tweeknoopsverzameling S die wordt aangegeven door de stippellijn. Speler 2 heeft slechts één informatieverzameling, n.l. de verzameling gevormd door de wortel W_2 van de deelspelboom die links in de figuur valt af te lezen (W_2 is daarin de knoop met het nummer 2). In elke informatieverzameling beschikt de bezittende speler over twee mogelijke acties. Volgens het boek, dat je bij deze opgave moet volgen, is een zuivere strategie voor speler 1 een afbeelding die aan W_1 de keuze A of B kan toevoegen en aan S de keuze t of b. Evenzo is een zuivere strategie voor speler 2 een afbeelding die W_2 de keuze L of R toevoegt. Zo onstaat de volgende matrixvorm/strategische vorm:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} At \\ Ab \\ Bt \\ Bb \end{array} & \begin{pmatrix} 4,0 & 0,4 \\ 0,4 & 4,0 \\ 3,0 & 3,0 \\ 3,0 & 3,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bijvoorbeeld: At is een verkorte notatie voor de zuivere strategie voor speler 1 die aan W_1 de keuze A toevoegt, en aan S de keuze t, etc. Hoewel Br en Bl formeel gesproken verschillende strategieën zijn voor speler 1, is er in de praktijk van de strategische vorm van het spel geen verschil: de derde en vierde rij van de bovenstaande matrix A zijn identiek.

b. In bovenstaande matrix kun je de sterretjes-methode uitvoeren, en die levert op dat er voor dit spel geen zuivere Nash evenwichten zijn. De gevraagde verzameling is dus de lege verzameling.

c. De verwachte uitbetaling van speler 1 is $F_1(p_1,p_2,p_3,p_4,q) := 4p_1q+4p_2(1-q)+3(p_3+p_4)$ en die van speler 2 is $F_2(p_1,p_2,p_3,p_4,q) = 4p_1(1-q)+4p_2q$. De beste reactie $\beta_1(q)$ wordt dus gevonden door $F_1(p_1,p_2,p_3,p_4,q) = 4qp_1+4(1-q)p_2+3(p_3+p_4)$ te maximaliseren over $(p_1,p_2,p_3,p_4) \in \Delta^3$. Schrijf even $p' := p_3+p_4$ en merk op dat F_1 alleen afhangt van p_3 en p_4 via p'. Omdat algemeen geldt $\max_{(p_1,p_2,p')\in\Delta^3} a_1p_1+a_2p_2+a_3p' = \max(a_1,a_2,a_3)$, geeft dit

$$\beta_1(q) = \begin{cases} \{(0,1,0,0)\} & \text{als } 0 \le q < \frac{1}{4} \\ \{(p_1,p_2,p_3,p_4) \in \Delta^4 : p_1 = 0\} & \text{als } q = \frac{1}{4} \\ \{(0,0,p_3,p_4) : p_3,p_4 \ge 0, p_3+p_4 = 1\} & \text{als } \frac{1}{4} < q < \frac{3}{4} \\ \{(p_1,p_2,p_3,p_4) \in \Delta^4 : p_2 = 0\} & \text{als } q = \frac{3}{4} \\ \{(1,0,0,0)\} & \text{als } \frac{3}{4} < q \le 1 \end{cases}$$

Bijvoorbeeld, als $q = \frac{1}{4}$ wordt $\beta_1(q)$ gevonden door $4\frac{1}{4}p_1 + 4\frac{3}{4}p_2 + 3p'$ te maximaliseren over alle (p_1,p_2,p') in Δ^3, en dat geeft dus $\max(1,3,3) = 3$ als maximum waarde, welke wordt aangenomen door alle $(0,p_2,p') \in \Delta^3$, etc.

Voor speler 2 wordt de beste reactie $\beta_2(p_1,p_2,p_3,p_4)$ gevonden door de lineare functie $F_2(p_1,p_2,p_3,p_4,q) = (4p_2-4p_1)q+4p_1$ te maximaliseren over $q \in [0,1]$. Dat geeft

$$\beta_2(p_1,p_2,p_3,p_4) = \begin{cases} \{1\} & \text{als } p_1 < p_2 \\ [0,1] & \text{als } p_1 = p_2 \\ \{0\} & \text{als } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Je zou nu de uitgebreide grafische methode van sectie 13.2.2 kunnen toepassen, maar het volgende argument werkt ook. Combinatie van de NE-definiërende eigenschappen $(p_1,p_2,p_3,p_4) \in \beta_1(q)$ en $q \in \beta_2(p_1,p_2,p_3,p_4)$ geeft het volgende: (1) $p_1 < p_2$ kan niet, want dan volgt $q = 1 > \frac{3}{4}$ en dus $(p_1,p_2) = (1,0)$, in tegenspraak met $p_1 < p_2$, (2) $p_1 > p_2$ kan ook niet, want dan volgt $q = 0 < \frac{1}{4}$ en dus $(p_1,p_2) = (0,1)$, in tegenspraak met $p_1 > p_2$. Dus resteert $p_1 = p_2$ als enige mogelijkheid; in eerste instantie geeft dit alleen $q \in [0,1]$. Echter, je ziet aan $\beta_1(q)$ dat (1) $q \in [0,\frac{1}{4})$ kan niet, want dan volgt $(p_1,p_2) = (0,1)$, wat $p_1 = p_2$ weerspreekt, (2) $q \in (\frac{3}{4},1]$ kan niet, want dan volgt $(p_1,p_2) = (1,0)$, wat $p_1 = p_2$ weerspreekt.

Dus is $\frac{1}{4} \le q \le \frac{3}{4}$ de enige overgebleven mogelijkheid voor q en voor al zulke q bevat $\beta_1(q)$ de vectoren $(0,0,p_3,p_4)$ met $p_3,p_4 \ge 0$ en $p_3+p_4 = 1$. Conclusie: de verzameling van strategiecombinaties

$$V := \{((0,0,p_3,p_4),(q,1-q)) : p_3,p_4 \ge 0, p_3+p_4 = 1, \frac{1}{4} \le q \le \frac{3}{4}\}$$

is de verzameling van alle gemengde Nash evenwichten voor dit spel. Speler 1 kiest dus zeker B als eerste actie, wat intuïtief geheel te verwachten was, en formeel loot hij/zij daarna – praktisch gezien is dat volkomen irrelevant gezien de eerdere keuze voor B – tussen de keuzes t en b.

d. Dit spel heeft twee deelspelen, n.l. het gehele spel, dat wortelt in boven vermelde W_1 en het deelspel dat wortelt in de boven vermelde knoop W_2. De strategische vorm van dit deelspel is

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 4,0 & 0,4 \\ 0,4 & 4,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

en dat komt overeen met het nulsomspel "matching pennies", waarbij de betalingen in eenheden van 4 plaatvinden. De unieke evenwichtsstrategie voor dit deelspel is daarom al bekend: hij bestaat uit de combinatie $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$.

Voor elke strategiecombinatie $((0,0,p_3,p_4),(q,1-q))$ uit bovenstaande V moet je nu kijken naar de *restrictie* ervan tot het bovengenoemde deelspel vanuit W_2. Merk op dat i.h.a. in dit spel een gemengde strategie (p_1,p_2,p_3,p_4) voor speler 1 neerkomt op het volgende: (1) met kans p_1+p_2 kiest de speler voor actie A en evenzo met kans p_3+p_4 voor actie B, (2) als deze loterij A als uitkomst heeft, dan leidt de restrictie van (p_1,p_2,p_3,p_4) tot het deelspel vanuit W_2 tot het loten tussen acties t en resp. b met kansen $\pi_1 := \frac{p_1}{p_1+p_2}$ en resp. $\pi_2 := \frac{p_2}{p_1+p_2}$ en deze kansen π_1 en π_2 moeten nu beide gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$ (net zo geldt hier dat $(q,1-q)$ gelijk moet zijn aan $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$). Echter, dit vooronderstelt $p_1+p_2>0$, wat hier niet het geval is! Toch kun je in dit geval verdedigen dat alle $((0,0,p_3,p_4),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ met $p_3,p_4\geq 0$ en $p_3+p_4=1$ de verzameling van deelspel-perfecte gemengde NE's vormen, omdat $\pi_i := \frac{p_i}{p_1+p_2}$ ook gelezen kan worden als $p_i=\pi_i(p_1+p_2)$, wat hier zeker klopt: $0=\frac{1}{2}*0$.

Opgave 2 [35 pt] Beschouw het veilingspel "first price sealed-bid auction" uit sectie 6.5.1 met volledige informatie en verzegelde biedingen $b_i\geq 0$, waarin elke speler i, $1\leq i\leq n$ (er geldt $n\geq 2$), de waardering (=valuation) $v_i\geq 0$ heeft voor het te veilen object. Net als in sectie 6.5.1 zijn de waarderingen geordend: $v_1\geq\cdots\geq v_n$. Als slechts één speler het hoogste bod $\hat{b}:=\max(b_1,\ldots,b_n)$ uitbrengt, dan krijgt die speler het object toegewezen tegen betaling van het door hem/haar geboden bedrag. Indien meerdere spelers het bod $\hat{b}$ uitbrengen vindt de toewijzing, zoals in sectie 6.5.1 uitgelegd, plaats aan die hoogst biedende speler i die de laagste index i heeft.

a. [5 pt] Geef twee zelf gekozen voorbeelden van een Nash evenwicht voor dit spel en leg duidelijk uit waarom die elk van die keuzes een NE voorstelt.

Vanaf nu is $\bar{\mathbf{b}}:=(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n)$ een *willekeurig* Nash evenwicht voor dit spel.

b. [7.5 pt] Bewijs: als speler i het object toegewezen krijgt onder $\bar{\mathbf{b}}$, dan geldt $\bar{b}_i\leq v_i$.

c. [7.5 pt] Geldt de ongelijkheid $\bar{b}_i\leq v_i$ ook als speler i het object *niet* toegewezen krijgt onder het NE $\bar{\mathbf{b}}$? Zoja, geef dan een sluitend bewijs; zonee, geef dan een tegenvoorbeeld met bijbehorende uitleg.

d. [7.5 pt] Bewijs: onder het NE $\bar{\mathbf{b}}$ wordt het object altijd toegewezen aan een speler i met $v_i=\hat{v}$; hier $\hat{v}:=\max(v_1,\ldots,v_n)$. *Aanwijzing:* Het kan helpen om eerst het speciale geval $v_1>v_2\geq v_3\geq\cdots$ te analyseren.

e. [7.5 pt] Bewijs: als speler i een bod $b_i\geq v_i$ uitbrengt, dan is die keuze *zwak* gedomineerd (het begrip "zwak gedomineerd" is vooral bij de behandeling van Chapter 13 aan de orde geweest). Bewijs ook: als speler i een bod $b_i<v_i$ uitbrengt, dan is die keuze niet zwak gedomineerd.

Oplossing. Merk op: in sectie 6.5.1 is sprake van $v_n>0$, en dat is hier dus ook het geval.

a. Wegens $v_1\geq v_2>0$ zitten onder bijv. $(v_2,v_2,v_2,\ldots,v_2)$, $(v_1,v_1,0,\ldots,0)$, $(v_2,0,v_2,0,\ldots,0)$ en $(\frac{v_1+v_2}{2},0,\frac{v_1+v_2}{2},0,\ldots,0)$ verschillende NE's (en ze verschillen alle als $v_1>v_2$), aangenomen dat $n\geq 3$. In het speciale geval $n=2$ met $v_1=v_2>0$ is alleen (v_1,v_1) een NE.

b. Stel je had $\bar{b}_i>v_i$. Dan heeft winnende speler i een uitbetaling $u_i(\bar{\mathbf{b}})=v_i-\bar{b}_i<0$. Door nu $b_i:=v_i<\bar{b}_i$ te kiezen gaat hij/zij er echt op vooruit, zowel als hij/zij de winnaar zou blijven als wanneer dat niet langer het geval is (in beide gevallen is de uitbetaling n.l. 0). Dit kan niet omdat $\bar{\mathbf{b}}$ een NE is. De gewenste tegenspraak is daarmee bereikt.

c. Nee. Kijk bijvoorbeeld naar bovenstaand NE $\bar{\mathbf{b}}:=(v_2,v_2,v_2,\ldots,v_2)$ in de situatie dat $v_3<v_2$, waarbij speler 3 het object niet krijgt toegewezen. Dan $\bar{b}_3=v_2\not\leq v_3$.

d. Stel van niet. Dan zou er een object-winnende speler j zijn met $v_j<\hat{v}$. Volgens onderdeel a geldt dan $\bar{b}_j\leq v_j<\hat{v}$ Maar er is dan ook een niet-winnende speler i met $v_i=\hat{v}$ en $u_i(\bar{\mathbf{b}})=0$. Door meer te bieden dan het winnende bod $\bar{b}_j$, n.l. $\tilde{b}_i=\frac{\bar{b}_j+\hat{v}}{2}$, wint speler i het object. Dan volgt $u_i(\tilde{b}_i,\bar{\mathbf{b}}_{-i})>0=u_i(\bar{\mathbf{b}})$, wat niet kan omdat $\bar{\mathbf{b}}$ een NE is. Dit levert de gewenste tegenspraak. *Opmerking:* Dit bewijs kan nog worden aangescherpt om te laten zien dat speler 1 altijd wint, net zoals dat in de vereenvoudigde situatie uit de aanwijzing al het geval is (dit volgt door hierboven eerst op te merken dat $i>j$ moet gelden, zodat eigenlijk $\tilde{b}_i=\bar{b}_j$ al wint).

e. De definitie van zwakke gedomineerdheid (zie bijv. pp. 182 in het boek, maar zie ook de opgegeven huiswerkopgave 3.6 op p. 40) geeft voor dit spel: het bod $b_i\in\mathbb{R}_+$ (=zuivere strategie) van speler i heet *zwak gedomineerd* als er een bod $b_i'\in\mathbb{R}_+$ bestaat met de volgende twee eigenschappen: (1) $u_i(b_i',\mathbf{b}_{-i})\geq u_i(b_i,\mathbf{b}_{-i})$ voor alle $\mathbf{b}_{-i}\in\mathbb{R}_+^{n-1}$ en (2) $u_i(b_i',\mathbf{b}_{-i})>u_i(b_i,\mathbf{b}_{-i})$ voor minstens één $\mathbf{b}_{-i}\in\mathbb{R}_+^{n-1}$. Als (1)-(2) gelden, dan zegt men ook dat b_i zwak wordt gedomineerd door b_i'. Het eerste bewijs is alsvolgt, waarbij het gegeven $b_i\geq v_i$ voor het eerste gemak wordt opgesplitst in twee gevallen.

Geval 1: $b_i > v_i$. Er geldt $u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) \leq u_i(v_i, \mathbf{b}_{-i})$ voor alle $\mathbf{b}_{-i}$. Immers, winnen met b_i geeft strikt negatieve uitbetaling, en verliezen met b_i geeft uitbetaling 0. Uitbetaling nul is ook het geval als v_i wordt geboden, ongeacht het winnen of verliezen van dat bod. Bovendien geeft $\mathbf{b}_{-i} = \mathbf{0}$ een situatie waarin $b_i > v_i$ zeker wint, met $u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) = v_i - b_i < 0 = u_i(v_i, \mathbf{b}_{-i})$. Dus b_i wordt zwak gedomineerd door v_i.

Geval 2: $b_i = v_i$. Dan is de uitbetaling aan speler i nul, ongeacht of zijn/haar bod b_i wint of niet. Nu $u_i(\frac{v_i}{2}, \mathbf{b}_{-i}) \geq u_i(v_i, \mathbf{b}_{-i})$ voor alle $\mathbf{b}_{-i}$, met $u_i(\frac{v_i}{2}, \mathbf{b}_{-i}) > u_i(v_i, \mathbf{b}_{-i})$ voor minstens één $\mathbf{b}_{-i}$, n.l. $\mathbf{b}_{-i} = \mathbf{0}$. Dus $b_i = v_i$ wordt zwak gedomineerd door $\frac{v_i}{2}$.

Terugkijkend zie je dat de gevallen 1 en 2 nog kunnen worden gecombineerd: er volgt dat $b_i \geq v_i$ zwak gedomineerd wordt door $\frac{v_i}{2}$.

Het tweede bewijs, dat gaat over de situatie $b_i < v_i$, is alsvolgt. Om aan te tonen dat b_i *niet* zwak gedomineerd is, is het genoeg om, voor elke $b'_i \neq b_i$ aan te tonen dat er een vector $\tilde{\mathbf{b}}_{-i}$ is (deze mag afhangen van de keuze b'_i) waarvoor $u_i(b'_i, \tilde{\mathbf{b}}_{-i}) < u_i(b_i, \tilde{\mathbf{b}}_{-i})$ (*). Kies hiertoe $b'_i \neq b_i$ willekeurig.

Geval a: $b'_i < b_i$. Kies voor $\tilde{\mathbf{b}}_{-i}$ een vector die het bod b_i winnend maakt, maar b'_i niet (bijvoorbeeld: kies $\tilde{b}_j := (b_i + b'_i)/2$ voor alle $j \neq i$). Dan geldt (*), want nu $u_i(b_i, \tilde{\mathbf{b}}_{-i}) = v_i - b_i > 0 = u_i(b'_i, \tilde{\mathbf{b}}_{-i})$.

Geval b: $b'_i > b_i > 0$. Kies voor $\tilde{\mathbf{b}}_{-i}$ een vector die zowel b_i als b'_i winnend maakt, bijvoorbeeld $\tilde{b}_j := \frac{b_i}{2}$ voor alle $j \neq i$. Dan geldt (*), want $u_i(b_i, \tilde{\mathbf{b}}_{-i}) = v_i - b_i > v_i - b'_i = u_i(b'_i, \tilde{\mathbf{b}}_{-i})$.

Geval c: $b_i = 0$. Alleen in dit geval is de uitspraak niet waar (mits $i \geq 2$): bijvoorbeeld $b_2 = 0$, een bod dat nooit kan winnen, wordt zwak gedomineerd door $\frac{v_2}{2}$.

Opgave 3 [30 pt] Beschouw het Cournot spel met n firma's. Als elke firma i een hoeveelheid $q_i \geq 0$ van het productiegoed afzet, dan is de marktprijs van het productiegoed $p = \max(a - Q, 0)$ Euro's per eenheid. Hier is $a > 0$ een gegeven parameter en $Q := \sum_{i=1}^n q_i$. Verder wordt verondersteld dat voor elke firma het produceren van één eenheid van het productiegoed c Euro's kost, met $0 \leq c < a$.

a. [7.5 pt] Formuleer het bijbehorende spel in strategische vorm.

b. [7.5 pt] Bepaal voor elke speler de beste reactiefunctie. *Aanwijzing:* hier is het handig om de notatie $Q_{-j} := \sum_{i, i \neq j} q_i = Q - q_j$ te gebruiken.

c. [5 pt] Bepaal een Nash evenwicht waarbij alle firma's precies dezelfde hoeveelheid van het productiegoed afzetten.

d. [10 pt] Bepaal de verzameling van alle zuivere Nash evenwichten voor dit spel. Bepaal vervolgens ook de verzameling van alle gemengde Nash evenwichten.

Oplossing. Merk op: deze opgave wordt vrijwel volledig afgedekt door de eerdere huiswerkopgave 6.2 uit het boek. Uiteraard mag hier $n \geq 2$ gesteld worden, omdat $n = 1$ een niet-spel situatie betreft (die overigens simpel is op te lossen).

a. Zet $S_i := [0, a]$ voor elke i, $1 \leq i \leq n$, en zij

$$\Pi_i(q_1, \ldots, q_n) := (\max(a - Q, 0) - c)q_i = \begin{cases} (a - Q_{-i} - q_i - c)q_i & \text{als } q_i < a - Q_{-i} \\ -cq_i & \text{als } q_i \geq a - Q_{-i} \end{cases} \tag{1}$$

de uitbetalingsfunctie voor speler i.

b. De beste reactiefunctie $\beta_i(q_{-i})$ voor speler i wordt nu bepaald. Om te beginnen ga je daartoe $f(q_i) := (a - Q_{-i} - q_i - c)q_i$ maximaliseren over $q_i \in [0, a - Q_{-i})$, aannemend dat $Q_{-i} < a$ geldt.

Geval 1: $0 < a - Q_{-i} \leq c$. In dit geval is $f(q_i)$ strikt dalend, dus dan is de optimale oplossing uiteraard $q_i^* = 0$.

Geval 2: $a - Q_{-i} > c$. Maximalisatie over het inwendige van het interval, n.l. $(0, a - Q_{-i})$ geeft als noodzakelijke voorwaarde voor optimaliteit $f'(q_i) = a - Q_{-i} - c - 2q_i = 0$, dus $q_i^* = (a - c - Q_{-i})/2 > 0$, met $f(q_i^*) > 0 = f(0)$, zodat q_i^* tegelijk ook maximaliseert over $[0, a - Q_{-i})$ (wegens $f'' > 0$ is de noodzakelijke voorwaarde voor optimaliteit ook voldoende – zeker voor kwadratische functies f is dit bekend van het VWO).

Geval 3: $Q_{-i} \geq a$. Dit restgeval werd aanvankelijk uitgesloten. Uit de onderste vork in (**??**) volgt dat dan $q_i^* = 0$ optimaal is in het geval $c > 0$. In het resterende geval $c = 0$ zijn alle $q_i \in [0, a]$ optimaal. Hier onder wordt alleen doorgewerkt met $c > 0$ (de oplossing voor de situatie met $c = 0$ is daaruit snel af te lezen).

Samengevat volgt nu dus de volgende generalisering van (6.1)-(6.2) in het boek (beperkt tot $c > 0$):

$$\beta_i(\mathbf{q}_{-i}) = \begin{cases} \{0\} & \text{als } Q_{-i} \geq a - c \\ \{\frac{a-c-Q_{-i}}{2}\} & \text{als } Q_{-i} < a - c \end{cases}$$

Deze formule staat ook op p. 327 van het boek, waar de oplossing van huiswerkopgave 6.2 staat beschreven.

c. Zet $q_i := \hat{q}$ voor alle i. Dan $Q = n\hat{q}$ en $Q_{-i} = (n-1)\hat{q}$. Dus volgt voor het gezochte NE: (1) $\hat{q} = 0$ als $\hat{q} \geq \frac{a-c}{n-1}$ en (2) $\hat{q} = (a - c - (n-1)\hat{q})/2$ als $\hat{q} < \frac{a-c}{n-1}$. Nu kan (1) niet gelden, omdat $a > c$, en (2) leidt tot $\hat{q} = \frac{a-c}{n+1} (< \frac{a-c}{n-1})$. Dus het gezochte NE is $(\frac{a-c}{n+1}, \ldots, \frac{a-c}{n+1})$. Zie ook p. 327 van het boek.

Opmerking: Een hopeloos foute methode om dit onderdeel op te lossen berust op het maximaliseren van $\hat{q}(a - n\hat{q} - c)$ over $\hat{q}$. Deze methode miskent de niet-coöperatieve SAD filosofie van een NE. Ze zou alleen op zijn plaats zijn in een heel ander coöperatief model (denk aan een kartel) waarbij de n spelers samenspannen om een zo groot mogelijke winst te behalen en tegelijk afspreken om allen dezelfde hoeveelheid $\hat{q}$ op de markt af te zetten.

d. [8 pt] Aanpassing van het argument in onderdeel c leidt voor het gezochte NE $\bar{\mathbf{q}}$ tot: (1′) $\bar{q}_i = 0$ als $\bar{Q}_{-i} := \sum_{j,j\neq i} \bar{q}_j \geq a - c$ en (2′) $\bar{q}_i = (a - c - \bar{Q}_{-i})/2 > 0$ als $\bar{Q}_{-i} < a - c$.

Methode 1: gebruik de NE-eigenschap – zie p. 327 van het boek. Merk eerst op dat (1′)-(2′) impliceren dat $2\bar{Q} \leq \sum_{i=1}^n (a - c - \bar{Q} + \bar{q}_i) = n(a - c - \bar{Q}) + \bar{Q}$ en dus dat $\bar{Q} \leq \frac{n}{n+1}(a-c) < a - c < a$. De afzetmarkt is dus niet verzadigd onder zo'n NE. Maar dan zal in geen enkel NE $\bar{\mathbf{q}}$ een speler i ermee accoord gaan dat $\bar{q}_i = 0$. Want dat zou uitbetaling nul geven, terwijl hij/zij door hoeveelheid $q_i > 0$ af te zetten, hoe klein ook, een strikt positieve uitbetaling kan realiseren. Daarom geldt (2′) voor alle i. Dat is equivalent met $\bar{q}_i = a - c - \bar{Q}$ voor alle i en toont aan dat alle $\bar{q}_i$'s aan elkaar gelijk zijn. Dankzij het vorige onderdeel leidt dit tot de volgende conclusie: als $\bar{Q} < a$, dan is $\bar{\mathbf{q}} = (\frac{a-c}{n+1}, \ldots, \frac{a-c}{n+1})$ het unieke zuivere NE. Dit generaliseert de Cournot uitkomst voor $n = 2$ in het boek op p. 76.

Methode 2: werk alleen door met (1′)-(2′). Om te benadrukken dat (1′)-(2′) voor alle spelers dezelfde vorm hebben, substitueer je $\bar{Q}_{-i} = \bar{Q} - \bar{q}_i$. Je krijgt dan de volgende equivalente uitdrukkingen: (1″) $\bar{q}_i = 0$ als $\bar{q}_i \leq \bar{Q} - a + c$ en (2″) $\bar{q}_i = a - c - \bar{Q}$ als $\bar{q}_i > \bar{Q} - a + c$. Merk vervolgens op dat (1″) alleen kan gelden als voldaan is aan $0 \leq \bar{Q} - a + c$, d.w.z. aan $\bar{Q} \geq a - c$ en (2″) alleen als voldaan is aan $a - c - \bar{Q} > \bar{Q} - a + c$, d.w.z. aan $\bar{Q} < a - c$. Dit leidt tot de volgende opsplitsing:

Geval 1: $\bar{Q} < a - c$. In dit geval volgt uit het bovenstaande dat (1″) voor geen enkele i kan gelden en daarom dat (2″) voor elke i moet gelden, d.w.z. $\bar{q}_i = a - c - \bar{Q}$ geldt voor elke i, zodat alle $\bar{q}_i$'s aan elkaar gelijk zijn. Dus is $(\frac{a-c}{n+1}, \ldots, \frac{a-c}{n+1})$ het unieke zuivere NE in dit geval.

Geval 2: $\bar{Q} \geq a - c$. In dit geval volgt uit het bovenstaande dat (2″) voor geen enkele i kan gelden en daarom dat (1″) voor elke i moet gelden, d.w.z. $\bar{q}_i = 0$ geldt voor elke i, zodat $\bar{Q} = 0$. Maar dan zou dit geval neerkomen op $0 \geq a - c$, wat niet kan omdat $a > c$ is verondersteld in de opgave. Geval 2 kan dus niet optreden.

Conclusie: $(\frac{a-c}{n+1}, \ldots, \frac{a-c}{n+1})$ uit geval 1 is het unieke zuivere NE.

[2 pt] Tenslotte: het unieke *gemengde* NE voor dit spel komt hier ook mee overeen. Immers, als elke speler i mag randomiseren/loten over $S_i := [0, a]$ dan is de beste reactie van speler i die randomisatie σ_i over q_i welke de verwachting van $(a - V_{-i} - q_i - c)q_i$ maximaliseert, met $V_{-i} := \sum_{j,j\neq i}$ verwachte afzet op de markt door speler j. Analoog aan de afleiding van $\beta_i(\mathbf{q}_{-i})$ en aan bekende identiteiten zoals $\max_{\mathbf{p}\in\Delta^m} \mathbf{p}A\mathbf{q} = \max_i \mathbf{e}^i A\mathbf{q}$, leidt dit ertoe dat elke σ_i geconcentreerd is in $q_i^* := 0$ als $V_{-i} \geq a - c$ en in $q_i^* := \frac{a-c-V_{-i}}{2}$ als $V_{-i} < a - c$. M.a.w. zegt dit dat elke σ_i in zo'n gemengd NE eigenlijk een zuivere strategie is voor speler i, n.l. een zuivere strategie die overeenkomt met de zuivere strategie $q_i^* \in S_i$ voor die speler (vergelijk dit met de rol van de eenheidsvectoren $\mathbf{e}^i$ en $\mathbf{e}^j$ in hoofdstuk 2 van het boek, welke overeenkomen met de zuivere strategieën i en resp. j), zodat ook volgt $V_{-i} = \sum_{j\neq i} q_j^*$ voor die "zuivere" randomisaties σ_i. Conclusie: voor NE's voegt mengen/randomisatie niets toe aan dit model en dat verklaart ook enigszins waarom hoofdstuk 6 hierover zwijgt.

Opgave 4 [**35 pt+15 pt extra**] Zij (N, v),met $N := \{1, \ldots, n\}$ en $v : 2^N \to \mathbb{R}$ een gebruikelijk TU-spel. Zij $I(v)$ de verzameling van imputaties (=imputations) voor dit coöperatieve spel.

a. [15 pt] Formuleer, uitsluitend in termen van v en zijn waarden, een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het leeg zijn van $I(v)$ en bewijs dat deze voorwaarde noodzakelijk en voldoende is. Geef ook een concreet voorbeeld van een spel (N, v) waarin je expliciet controleert dat die voorwaarde noodzakelijk en voldoende is.
b. [20 pt] Stel dat $I(v) \neq \emptyset$. Voor elke $i = 1, \ldots, n$ vormt men de vector $\tilde{\mathbf{x}}^i \in \mathbb{R}^n$, gegeven door $\tilde{x}^i_j := v(j) := v(\{j\})$ als $j \neq i$ en $\tilde{x}^i_i := v(N) - \sum_{k,k\neq i} v(k)$. Bewijs dan dat $I(v)$ het convex omhulsel conv W is van de verzameling W gevormd door de vectoren $\tilde{\mathbf{x}}^1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}^n$. Geef ook een concreet voorbeeld van een spel met $I(v)$ bestaande uit minstens twee elementen, waarin je de bovenstaande identiteit expliciet controleert
c. *Voor maximaal 15 extra punten:* Stel vanaf nu dat het spel (N, v) *simpel* is. Zij veto(v) de gebruikelijke notatie voor de verzameling van alle veto spelers. Bewijs de volgende drie uitspraken (die samen een stelling uit het boek opmaken), waarbij je alle daaraan voorafgaande resultaten, m.n. over core en dominantie-core, mag gebruiken:

(i) de core $C(v)$ van het spel is precies gelijk aan het convexe omhulsel van $\{\mathbf{e}^i : i \in \text{veto}(v)\}$,

(ii) onder de voorwaarden (1) veto(v) $= \emptyset$ en (2) speler k is de unieke speler i met $v(i) = 1$, geldt dat $C(v)$ leeg is en dat de dominantie-core $DC(v)$ gelijk is aan $\{\mathbf{e}^k\}$.

(iii) als minstens één van de voorwaarden (1) en (2) in onderdeel (ii) *niet* is vervuld, dan geldt $C(v) = DC(v)$.

Oplossing. a. Deze n.e.v. voorwaarde voor leegheid luidt: (*) $v(N) < \sum_{i=1}^n v(i)$ (zie p. 230). Want als $\mathbf{x} \in I(v) \neq \emptyset$ dan $v(N) = x(N) = \sum_{i=1}^n x_i \geq \sum_{i=1}^n v(i)$. Dus volgt $I(v) = \emptyset$ uit (*). Omgekeerd, stel dat geldt $\delta := v(N) - \sum_{i=1}^n v(i) \geq 0$; kies dan $x_i := v(i) + \frac{\delta}{n}$ om een element in $I(v)$ te construeren. Dus $I(v) = \emptyset$ impliceert (*).

Voorbeeld: neem bijv. het spel met $N = \{1, 2\}$, $v(N) = 0$ en $v(1) = v(2) = 1$, dat evident geen imputatie heeft.

b. N.B. Dit is opgave 16.1 uit het boek. Wegens het vorige onderdeel geldt $\delta := v(N) - \sum_i v(i) \geq 0$. Het bewijs volgt nu uit onderstaande stappen 1-2.

Stap 1: conv$(W) \subset I(v)$. De verzameling $I(v)$, gedefinieerd door lineaire (on)gelijkheden, is convex, dus *conv*$(W) \subset I(v)$ volgt door $W \subset I(v)$ te bewijzen. Kies daartoe een willekeurige $\tilde{\mathbf{x}}^i$. Dan $\tilde{x}^i_j = v(j) \geq v(j)$ als $j \neq i$ en $\tilde{x}^i_i := v(N) - \sum_k v(k) + v(i) \geq v(i)$. Bovendien geldt $\tilde{x}^i(N) = \sum_{j,j\neq i} v(j) + \tilde{x}^i_i = v(N)$. Dus $\tilde{x}^i \in I(v)$ geldt voor elke i, wat $W \subset I(v)$ inhoudt. Zoals boven gesteld volgt nu dus *conv*$(W) \subset I(v)$.

Stap 2: conv$(W) \supset I(v)$. Zij $\mathbf{x} \in I(v)$ willekeurig. Je moet aantonen dat voor zekere $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, met $\sum_i \lambda_i = 1$, geldt $\mathbf{x} = \sum_i \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}^i$, d.w.z. dat voor elke coördinaat j geldt $x_j = \sum_i \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}^i_j$, d.w.z.

$$x_j = \sum_{i,i\neq j} \lambda_i v(j) + \lambda_j (v(N) - \sum_{k,k\neq j} v(k)) = v(j) + \lambda_j \delta.$$

Als $\delta = 0$ wordt hieraan automatisch voldaan door elke willekeurige $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, met $\sum_i \lambda_i = 1$, bijv. door $\lambda_i := \frac{1}{n}$ (merk op: als $\delta = 0$, dan zijn $I(v)$ en W singletons). Als $\delta > 0$ dan kies je $\lambda_j := \frac{x_j - v(j)}{\delta}$ voor alle j. Wegens $x_j \geq v(j)$ geldt dan $\lambda_j \geq 0$ en er geldt

$$\sum_j \lambda_j = \frac{1}{\delta}(x(N) - \sum_j v(j)) = \frac{1}{\delta}(v(N) - \sum_j v(j))\frac{\delta}{\delta} = 1.$$

Conclusie: $\mathbf{x} \in$ *conv*(W) is bewezen, en omdat $\mathbf{x} \in I(v)$ willekeurig was, is ook stap 2 bewezen.

c. Zie het bewijs van Stelling 16.11 in het boek.