Uitwerking Eerste Quiz Speltheorie, 24-10-2012

Attentie! Maak van de onderstaande drie opgaven er slechts twee naar eigen keuze!

Opgave 1 [50 pt]. Beschouw het spel met de uitbetalings-bimatrix

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 3,2 & 1,1 \\ 1,b & 2,3 \end{pmatrix}.$$

Hier is $b \in \mathbb{R}$ een parameter.
a [20 pt]. Bereken alle Nash evenwichten in zuivere strategieën in het geval $b = 1$.
b [15 pt]. Bereken alle Nash evenwichten in gemengde strategieën in hetzelfde geval $b = 1$.
c [15 pt]. Bereken voor elke waarde van $b \in \mathbb{R}$ de verzameling van alle Nash evenwichten in gemengde strategieën.

Oplossing. De uitwerking van deze opgave kan worden afgelezen uit de eerder gegeven volledige uitwerking van opgave 3.7 in het boek van Peters (zie de thuispagina van het college). De antwoorden zijn:
a. $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^1)$ en $(\mathbf{e}^2, \mathbf{e}^2)$,
b. Naast de twee NE's[1] uit onderdeel a komt er nog bij $((\frac{2}{3}.\frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$.
c. Er zijn drie gevallen te onderscheiden, analoog aan de voornoemde uitwerking van opgave 3.7: (1) $b > 3$: dan is $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^1)$ het enige NE. (2) $b = 3$: dan zijn de (gemengde) NE's, naast $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^1)$ ook alle paren $(\mathbf{e}^2, (\bar{q}, 1 - \bar{q}))$ met $0 \leq \bar{q} \leq \frac{1}{3}$, (3) $b < 3$: dan zijn er drie NE's, nl. $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^1)$, $(\mathbf{e}^2, \mathbf{e}^2)$ en $((\frac{3-b}{4-b}, \frac{1}{4-b}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$.

Opgave 2 [50 pt]. Gegeven is een tweepersoons spel met $m \times n$ uitbetalings-bimatrix (A, B). Stel dat $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) \in \Delta^m \times \Delta^n$ een gemengd Nash evenwicht is.
a [35 pt]. Bewijs dat voor elk paar indices i, i' het volgende geldt: als $\bar{p}_i > 0$ en $\bar{p}_{i'} > 0$, dan $\mathbf{e}^i A\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{e}^{i'} A\bar{\mathbf{q}}$.
b [15 pt]. Laat door een tegenvoorbeeld zien dat de implicatie in onderdeel a niet meer hoeft te gelden als $p_i = 0$ of $p_{i'} = 0$.

Oplossing. a. *Methode 1.* Claim: $\bar{p}_{i_0} > 0 \Rightarrow \mathbf{e}^{i_0} A\bar{\mathbf{q}} = \bar{v} := \bar{\mathbf{p}} A\bar{\mathbf{q}}$. In elk geval geldt hier $\leq$ vanwege de definitie van NE. Stel nu dat je had $\mathbf{e}^{i_0} A\bar{\mathbf{q}} < \bar{v}$. Vanwege $\bar{v} = \sum_i \bar{p}_i \mathbf{e}^i A\bar{\mathbf{q}} = \sum_{i, \bar{p}_i > 0} \bar{p}_i \mathbf{e}^i A\bar{\mathbf{q}}$ zou dan gelden

$$\bar{v} = \sum_{i, \bar{p}_i > 0, i \neq i_0} \bar{p}_i \underbrace{\mathbf{e}^i A\bar{\mathbf{q}}}_{\leq \bar{v}} + \underbrace{\bar{p}_{i_0}}_{> 0} \underbrace{\mathbf{e}^{i_0} A\bar{\mathbf{q}}}_{< \bar{v}} < \sum_{i, \bar{p}_i > 0} \bar{p}_i \bar{v} = \bar{v} \sum_{i, \bar{p}_i > 0} \bar{p}_i = \bar{v} \sum_i \bar{p}_i = \bar{v},$$

[1]Merk op: die twee garanderen dat wat er in onderdeel b eventueel nog bijkomt aan NE's volledig gemengd moet zijn, zodat – als alternatief op hetgeen op de thuispagina is voorgedaan – ook de equalizer rule kan worden toegepast .

en dat is onmogelijk. Hiermee is de claim bewezen, en het gevraagde volgt daar direct uit. *Commentaar:* Met een kleine wijziging van dit argument kan na de eerste constatering dat $\leq$ in elk geval geldt, de omgekeerde ongelijkheid $\geq$ ook rechtstreeks worden bewezen, maar onder de tijdsdruk van een tentamen werkt de boven gevolgde methode waarschijnlijk het best.

Methode 2. Stel dat voor $\bar{p}_i > 0$ en $\bar{p}_{i'} > 0$ geldt $\mathbf{e}^i A\bar{q} \neq \mathbf{e}^{i'} A\bar{q}$. Je moet dan laten zien dat dit tegenspraak geeft. Zonder beperking van algemeenheid kan worden verondersteld dat $\mathbf{e}^i A\bar{q} > \mathbf{e}^{i'} A\bar{q}$. Vorm nu $\tilde{\mathbf{p}} := \bar{\mathbf{p}} - \bar{p}_{i'}\mathbf{e}^{i'} + \bar{p}_{i'}\mathbf{e}^i$ (dit verplaatst kansmassa van slechtere naar betere actie). Merk op dat $\tilde{p}_j$ alleen afwijkt van $\bar{p}_j$ voor $j = i$ en $j = i'$,met respectievelijk $\tilde{p}_i = \bar{p}_i + \bar{p}_{i'}$ en $\tilde{p}_{i'} = 0$, hetgeen aantoont dat $\tilde{\mathbf{p}}$ een kansvector in Δ^m is. Nu is

$$\tilde{\mathbf{p}}A\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{p}}A\bar{\mathbf{q}} = \underbrace{\bar{p}_{i'}}_{>0}\underbrace{(\mathbf{e}^i A\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{e}^{i'} A\bar{\mathbf{q}})}_{>0} > 0$$

in tegenspraak met de NE-eigenschap van het paar $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$.

b. Tegenvoorbeeld: neem $m = 1$ en $n = 2$ en kies $A = (5, 0)^T$. Dan is $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^1)$ NE, maar $5 = \mathbf{e}^1 A\mathbf{e}^1 \neq \mathbf{e}^2 A\mathbf{e}^1 = 0$.

Opgave 3 [50 pt]. Gegeven is de volgende matrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 2,1 \\ 6,2 & 5,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beschouw het spel waarbij *tweemaal* met deze matrix wordt gespeeld en waarbij, na afloop van de eerste ronde, beide spelers vernemen wat ze in die eerste ronde hebben gedaan. Na de tweede ronde worden de uitbetalingen van ronde 1 en 2 bij elkaar opgeteld om de totale uitbetaling te bepalen. Bijvoorbeeld: als de tweede speler R speelt in ronde 1 en L in ronde 2, dan krijgt zij 5+2 =7 eenheden geld als de eerste speler B kiest in ronde 1 en T in ronde 2.
a [10 pt]. Formuleer dit spel als een spel in uitgebreide vorm.
b [10 pt]. Hoeveel strategieën heeft elke speler? Formuleer het spel ook als een spel in strategische vorm.
c [20 pt]. Bepaal alle deelspel-perfecte evenwichten van dit spel.
d [**10** pt]. Stel nu dat bovenstaand spel wordt veranderd in het *viermaal* herhaald spelen met bovenstaande matrix (na elke ronde vernemen beide spelers wat ze in die ronde hebben gedaan). Bepaal ook van dat spel alle deelspel-perfecte evenwichten.

Oplossing. *Opmerking vooraf.* Het eigenlijke spel is triviaal omdat actie B actie T strikt domineert, en bij herhaald spelen blijft dat zo. De opgave toetst dus vooral of je *formele* kennis over spelen kunt toepassen aan de hand van een eenvoudig concreet spel.

a. De spelboom voor dit spel is getekend in figuur 1. Het is handig om hier te spreken van de twee spelers I en II. Merk op dat de informatieverzamelingen voor speler I de afgebeelde beslissingsknopen I-1, I-2, I-3, I-4 en I-5 zijn (d.w.z. singletons). Ook speler II heeft vijf informatieverzamelingen, namelijk de afgebeelde II-1, II-2, II-3, II-4 en II-5; elk zo'n informatieverzameling bestaat uit twee knopen, met elkaar verbonden door een stippellijn.

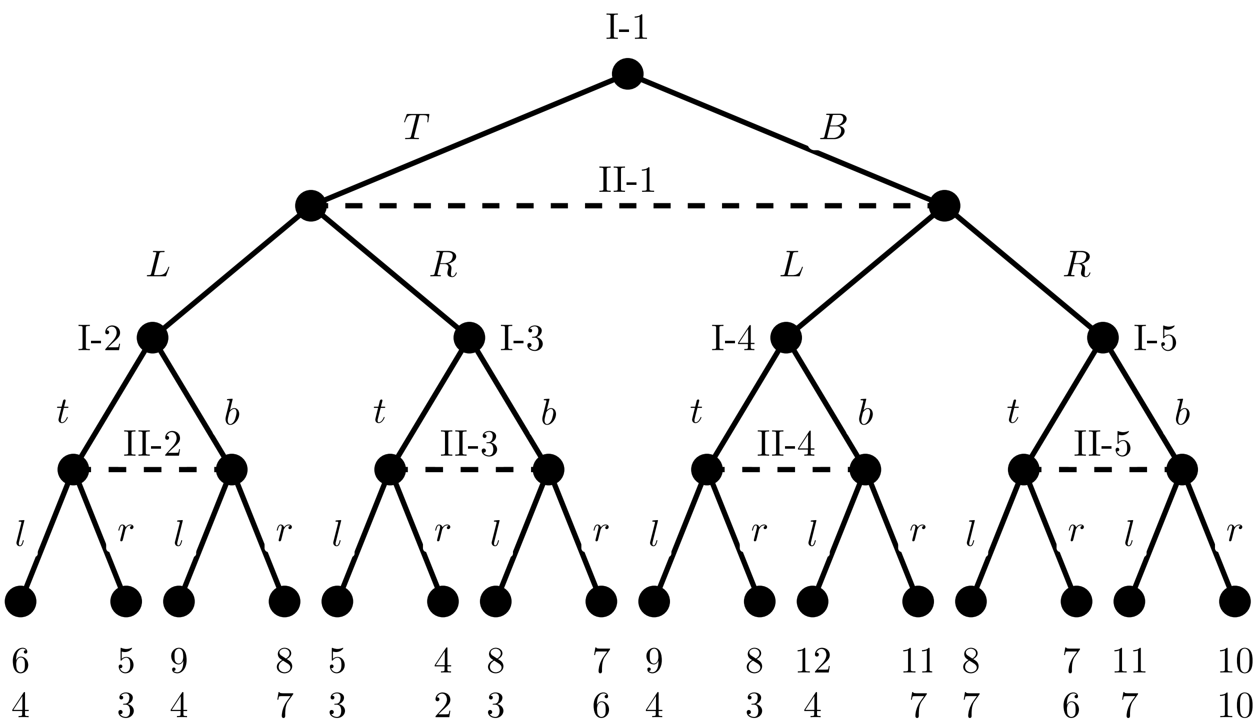

Figure 1: Boomdiagram van het spel in uitgebreide vorm

b. Volgens de formele definitie op p. 46 bestaat elke strategie voor speler I uit een lijst van acties, en elke actie in die lijst hoort bij precies één informatieverzameling uit de collectie van vijf knopen I-1, I-2, I-3, I-4 en I-5. Omdat in elke knoop precies twee acties kunnen worden gekozen, is het aantal strategieën voor speler I dus $2^5 = 32$. Voor speler II geldt iets soortgelijks: zij heeft de vijf informatieverzamelingen II-1, II-2, II-3, II-4 en II-5, en in elk zo'n verzameling kan ze precies twee acties kiezen. Ook haar aantal strategieën is dus $2^5 = 32$. Het totale aantal paren strategieën is derhalve $2^{10} = 1024$.

Deze beschrijving van de strategieën brengt enige overbodigheid met zich mee, zoals ook in het boek en op het college is betoogd. Kijk bijvoorbeeld eens naar de uitwerking van strategie (B, b, t, t, b) voor speler I en de strategie (L, r, l, l, r) voor speler II (dus hier kiest speler I voor B in knoop I-1, voor b in knoop I-2, t in knoop I-3, enz., en speler II kiest voor L in de informatieverzameling II-1, voor r in II-2, voor l in II-3, enz. Deze twee strategieën leiden samen tot de eindknoop $(9, 4)$, via het unieke pad dat loopt van de wortel I-1 naar $(9, 4)$ via de informatieverzamelingen II-1, I-4 en II-4. *Alleen* de coördinaten in de lijst acties (B, b, t, t, b) die te maken hebben met I-1 en I-4 (dat zijn dus de eerste en de vierde coördinaat) en *alleen* de coördinaten in de lijst (L, r, l, l, r) die te maken hebben met II-1 en II-4, d.w.z. de eerste en vierde coördinaat, zijn van belang voor het bereiken van $(9, 4)$. Met andere woorden: elk paar strategieën $(B, *, *, t, *)$ en $(L, *, *, l, *)$, met willekeurige toegelaten acties $*$, leidt tot dezelfde betalingsuitkomst $(9, 4)$ van het spel. In totaal zijn er dus $2^3 \times 2^3 = 64$ verschillende paren strategieën die alle tot de uitkomst $(9, 4)$

leiden (dit klopt ook boekhoudkundig: er zijn 16 betalingsuitkomsten, en $16 \times 64 = 1024$ geeft dus nogmaals het totale aantal strategieën).

Pas na deze analyse kan de spelmatrix worden opgesteld, en wel op de volgende manier: i.p.v. het voorbeeldpaar te beschrijven als $((B, *, *, t, *), (L, *, *, l, *))$, kun je het ook verkort noteren als (Bt, Ll). Je geeft dan eigenlijk het *verloop* van het spel weer: "in de eerste ronde kiest speler I voor B en speler II voor L; in de volgende ronde kiezen ze respectievelijk t en l, en zo komen ze dan uit op de eindknoop $(9, 4)$". Het blijft echter belangrijk om je te realiseren dat in werkelijkheid het paar (Bt, Ll) staat voor alle 64 echte strategie-paren $((B, *, *, t, *), (L, *, *, l, *))$! Op deze manier ontstaat de volgende 4×4 matrix:

$$\begin{array}{c} \\ Tt \\ Tb \\ Bt \\ Bb \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad Ll & \quad Lr & \quad Rl & \quad Rr \end{array} \\
\begin{pmatrix}
6, 4^* & 5, 3 & 5, 3 & 4, 2 \\
9, 7^* & 8, 7^* & 8, 3 & 7, 6 \\
9, 4 & 8, 3 & 8, 7^* & 7, 6 \\
12^*, 4 & 11^*, 7 & 11^*, 7 & 10^*, 10^*
\end{pmatrix}
\end{array}$$

c. Met de sterretjes-methode is in de matrix die in onderdeel b werd opgesteld al aangegeven dat de uitkomst $(10, 10)$ correspondeert met een Nash evenwicht. Merk op: alle paren van het type $((B, *, *, *, b), (R, *, *, *, r))$ leiden tot die eindknoop volgens de bovenstaande analyse.[2] Er zijn dus 64 NE-strategieparen voor dit spel. Omdat het gehele spel ook deelspel is van zichzelf, moet elk perfect NE dus zeker van de vorm $((B, *, *, *, b), (R, *, *, *, r))$ zijn. Naast het zojuist vermelde gehele spel zijn er nog vier andere deelspelen, ontspringend vanuit de knopen I-2, I-3, I-4 en I-5.

Elk van die vier deelspelen ziet er uit als in figuur 2, met waarden α_i en β_i die de uitbetalingen voorstellen van de bijbehorende eerste ronde van het spel: voor het deelspel ontspringend in knoop I-2 is $(\alpha_2, \beta_2) = (3, 2)$, voor I-3 is $(\alpha_3, \beta_3) = (2, 1)$, voor I-4 is $(\alpha_4, \beta_4) = (6, 2)$ en voor het vijfde deelspel, geworteld in knoop I-5, is $(\alpha_5, \beta_5) = (5, 5)$.

Toepassing van de sterretjes-methode op de bijbehorende 2×2 bimatrix toont aan dat het deelspel in figuur 2 een uniek NE heeft, corresponderend met het paar acties (b, r). Voor bovenstaand NE van de vorm $((B, *, *, *, b), (R, *, *, *, r))$ betekent dit voor het deelspel dat wortelt in de knoop I-2 dat alleen paren van de vorm $((B, b, *, *, b), (R, r, *, *, r))$ perfecte NE's kunnen zijn. Voor de deelspelen die beginnen in I-3 en I-4 leidt eenzelfde redenering tot de conclusie dat $((B, b, b, b, b), (R, r, r, r, r))$ het enige perfecte NE is.

Voor het viermaal herhaalde spel kan het bovenstaande argument worden herhaald: de nieuwe boom (die je nu uiteraard niet echt meer tekent) ontstaat door van elke eindbetalingsknoop in figuur 1 een informatieverzameling/beslissingsknoop I-i voor speler I te maken. $i = 6, \ldots, 21$, en door in elk zo'n knoop vervolgens een kopie van de boom in figuur 1 te laten wortelen, met een bijpassende hernummering voor de informatieverzamelingen voor spelers I en II. Dit geeft $16 \times 16 = 256$ uitbetalingsknopen als uitkomsten, onderaan de boom. Geheel rechts in de nieuwe

[2] Ga zelf na dat de positie van de sterretjes terecht afwijkt van die in het voorbeeld $((B, *, *, t, *), (L, *, *, l, *))$.

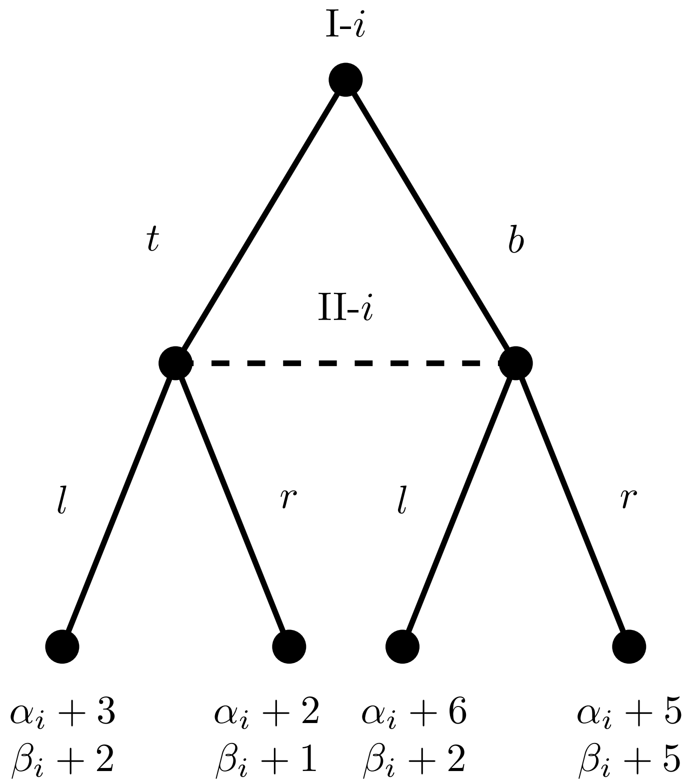

Figure 2: HET DEELSPEL DAT WORTELT IN KNOOP I-i, $i = 2, 3, 4, 5$

boom staat dan de betalingsuitkomst $(20, 20)$, die correspondeert met het verloop "viermaal (B, P) spelen". Omdat het oorspronkelijke spel (één spelronde) (B, R) als uniek NE heeft, is gemakkelijk in te zien dat viermaal (B, R) spelen de enige mogelijkheid is om in het viermaal herhaalde spel SAD (= stable-against-individual-deviations) te zijn. Het totale aantal strategieën bedraagt 2^{85}, want elke speler heeft $1 + 4 + 16 + 64 = 85$ informatieverzamelingen; voor speler I is zo'n informatieverzameling gewoon een knoop (singleton) en voor speler II is dat een verzameling bestaande uit 2 knopen. Deze tellingen betekenen dat elke betalingsuitkomst door 2^{81} verschillende paren strategieën kan worden bereikt, en in het bijzonder dat er dus 2^{81} Nash evenwichts-strategieparen zijn. Preciezer gezegd, de meest rechtse betalingsuitkomst $(20, 20)$ wordt bereikt door alle strategieparen $(\tilde{B}, \tilde{R})$, met $\tilde{B}$ de vector die op de coördinaatposities 1, 5, 21 en 85 vijf B's heeft staan en voor de rest gevuld is met sterretjes om aan te geven dat op die overige coördinaatposities willekeurige acties gekozen mogen worden. De beschrijving van de bijbehorende vector $\tilde{R}$ verloopt analoog. Vervolgens kijk je naar de deelspelen die dit spel heeft. Onderaan de spelboom zijn $16 \times 4 = 64$ deelspelen te vinden van hetzelfde type als in figuur 2. Een perfect NE moet voor elk van die 64 deelspelen net zo'n perfect NE opleveren als boven werd bereikt met $((B, b, b, b, b), (R, r, r, r, r))$ voor het spel in twee ronden. Dit betekent dat in bovengenoemde $\tilde{B}$ [resp. $\tilde{R}$] de 63 sterretjes tussen coördinaatposities 21 en 85 alle veranderd moeten worden in B's [resp. R's]. Eén niveau hoger in de boom vind je zijn 16 deelspelen die wortelen in de boven beschreven knopen I-i, $i = 6, \ldots, 21$. Een perfect NE moet voor elk van die 16 deelspelen net zo'n perfect NE opleveren als boven werd bereikt met $((B, b, b, b, b), (R, r, r, r, r))$ voor het spel in twee ronden. Dit betekent dat de 15 sterretjes tussen coördinaatposities 6 en 21 alle veranderd moeten worden in B's [resp. R's]. Zo doorgaande naar boven in de boom kom je dan tot de conclusie dat, hoewel er 2^{81} Nash evenwichts-strategieparen zijn, er slechts één perfect Nash evenwicht is, namelijk $((B, B, \ldots, B), (R, R, \ldots, R))$ gevormd uit 85 B's en 85 R's.