

HERTENTAMEN SPELTHEORIE

22 maart 2016 , 8.30-11.30

Universiteit Utrecht, Mathematisch Instituut

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
 - Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
 - Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je er aan komt.
-

Opgave 1, 20 pt

Beschouw het volgende bi-matrix spel:

$$\begin{pmatrix} (2, 4) & (6, 2) & (3, 2) \\ (4, 2) & (0, 4) & (5, 2) \\ (2, 6) & (2, -2) & (1, 1) \end{pmatrix}$$

- (5 pt.) Elimineer alle strategieën die strikt gedomineerd zijn, eventueel door gemengde strategieën. Herhaal deze procedure zo vaak mogelijk en geef de bi-matrix van het gereduceerde spel.
- (15 pt.) Bepaal alle Nash evenwichten van het oorspronkelijke spel.

Opgave 2, 30 pt

Dolores verkoopt klassieke auto's. Humbert heeft z'n oog laten vallen op een Alfa Romeo Giulietta Veloce Spider uit 1958.

Van dit type auto's is een fractie p in prima staat en een fractie $1 - p$ is matig onderhouden. Deze informatie is bij beiden bekend. Prima auto's hebben natuurlijk een hogere waarde, dus is het voor Humbert belangrijk te weten wat de staat van de auto is voor hij een bod doet. We nemen aan dat $p = \frac{1}{2}$.

De Natuur heeft bepaald of deze specifieke auto prima of matig is.

Humbert vraagt aan Dolores naar de staat van de auto. Dolores antwoordt Goed (om aan te geven dat de auto prima is) of Slecht (om aan te geven dat de auto matig onderhouden is), maar haar antwoord hoeft niet noodzakelijk waar te zijn. Humbert besluit na het antwoord van Dolores of hij een Hoog bod of een Laag bod doet.

Als Dolores aan Humbert heeft verteld dat de auto Goed is, zal ze een Hoog bod accepteren, maar niet een Laag bod. Als ze hem heeft verteld dat de auto Slecht is, zal ze zowel een Hoog als een Laag bod accepteren.

Humbert heeft een payoff van $+1$ als hij een prima auto voor een Hoog bod

heeft gekregen, of een matige auto voor een Laag bod. Als hij een prima auto voor een Laag bod krijgt is z'n payoff +2, maar een matige auto voor een Hoog bod geeft hem een payoff van -1. Als er geen transactie is geweest (omdat z'n bod is afgewezen) is z'n payoff 0.

Dolores heeft een payoff van +1 als zij een prima auto voor een Hoog bod heeft verkocht, of een matige auto voor een Laag bod. Als zij een matige auto voor een Hoog bod heeft verkocht heeft ze een payoff van +2. Een prima auto verkopen tegen een Laag bod levert haar een payoff van -1. Als er geen transactie is geweest is haar payoff 0.

Daarnaast moet van haar payoff een bedrag $r \geq 0$ worden afgetrokken, als blijkt dat ze niet de waarheid heeft gesproken. Humbert ontdekt natuurlijk snel genoeg of z'n auto inderdaad de kwaliteit heeft die Dolores hem heeft wijs gemaakt en zo niet, dan lijdt Dolores reputatieschade ter waarde van r .

- (a) (10 pt) Geef de extensive form van dit spel.
- (b) (15 pt) Neem $r = 0$ en bepaal alle Nash evenwichten. Geef bij elk evenwicht aan of het Perfect Bayesian is en zo ja, geef de bijbehorende beliefs.
- (c) (5 pt) Bepaal een waarde van r waarvoor dit spel een separating evenwicht heeft. Bedenk zelf een economische moraal (maar die hoeft je niet op te schrijven).

Opgave 3, 25 pt

Beschouw een bargaining spel waarbij de eerste speler een utility $u_1(x) = x$ heeft en de tweede speler een utility $u_2(x) = x^\beta$, met $0 < \beta < 1$. Het disagreement point is $d = (0, 0)$. Ze moeten 1 eenheid verdelen.

- (a) (5 pt) Zij (S, d) het bargaining probleem dat gedefinieerd wordt door deze utiliteiten. Schets de feasible set van (S, d) , met $\beta = 1/3$. Geef een uitdrukking $u_2 = P(u_1)$ voor de Pareto-optimale verzameling in het kwadrant $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$.
- (b) (10 pt) Neem nu aan dat de spelers een Rubinstein alternating offers procedure volgen, met discount factor $0 < \delta < 1$. Het is bekend dat dit er toe leidt dat speler 1 een voorstel (x_1, x_2) doet en speler 2 het voorstel (y_1, y_2) .
N.B.: x_1 en x_2 zijn de utiliteiten die speler 1, respectievelijk 2, in dit voorstel krijgen. Hierbij liggen (x_1, x_2) en (y_1, y_2) op de Pareto optimal set van S . Bovendien geldt dat $x_2 = \delta y_2$ en $y_1 = \delta x_1$. Tenslotte weten we dat het voorstel van speler 1 wordt aangenomen.
Zij β willekeurig, $0 < \beta < 1$. Bepaal de uitkomst (x_1, x_2) in termen van β en δ .
- (c) (10 pt) Bepaal $\lim_{\delta \rightarrow 1} x_1$. Laat zien dat deze limiet overeen komt met de Nash bargaining solution.

Opgave 4, 25 pt.

Neem $N = \{1, 2, 3\}$ en $\nu(\{1\}) = 0$, $\nu(\{2\}) = 0$, $\nu(\{3\}) = 0$, $\nu(\{1, 2\}) = 50$,
 $\nu(\{1, 3\}) = 60$, $\nu(\{2, 3\}) = 30$, $\nu(\{1, 2, 3\}) = 120$.

- (a) (5 pt.) Bepaal de Shapley waarde van dit spel.
- (b) (10 pt.) Bepaal de kern ("core") van dit spel. Geef een twee-dimensionale grafische voorstelling van de kern.
- (c) (10 pt.) Bepaal de nucleolus van dit spel.