Herkansing speltheorie

18 juli 2017 , 13.30-16.30

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
- Er zijn VIER opgaven.
- Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je er aan komt.

Opgave 1, 25 pt.
Beschouw het nulsom spel:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) (5 pt) Geef de waarde van dit spel.

(b) (10 pt) Geef de optimale (maximin) strategie of strategieën van de rijspeler.

(c) (10 pt) Geef de optimale (minimax) strategie of strategieën van de kolomspeler.

Opgave 2, 25 pt.
La Vida Loca is een tapas restaurant. In zo'n restaurant bestel je een aantal tapas (kleine gerechten), naar gelang je honger hebt. LVL heeft een actie: groepen van $k \geq 2$ personen betalen $16k$ euro, als ze gezamenlijk $4k$ tapas of meer bestellen. Als ze minder bestellen, of als gasten alleen zijn, betalen ze 4 euro per tapa. Als een groep dus veel bestelt, hoeven ze minder te betalen dan als ieder apart zou afrekenen. Zij N de verzameling van gasten aan een tafel. We noemen de winst $\nu(S)$ van een coalitie $S \subset N$ het verschil tussen de som van wat alle individuele leden zouden moeten betalen als ze alleen zouden zitten en wat de coalitie moet betalen (dus inclusief korting). Gegeven het aantal tapas dat ieder individu wil bestellen, is (N, ν) een coöperatief spel.
Alfredo en Billy zitten aan een tafeltje en hebben flink honger. Alfredo wil $m \geq 5$ tapas bestellen en Billy $n \geq 5$.

(a) (5 pt.) Bepaal kern, nucleolus en Shapley waarde van dit spel. Hoeveel betaalt iedere speler als de winst wordt verdeeld volgens de Shapley waarde?

Voordat ze bestellen, zien Alfredo en Billy hun gezamenlijke vriendin Zsa Zsa alleen aan een tafeltje zitten. Ook zij moet nog bestellen. Ze nodigen haar uit om bij hen te komen zitten. Zsa Zsa vertelt dat ze 4 tapas wil. We hebben nu een coöperatief spel met 3 deelnemers.

(b) (5 pt.) Bepaal de Shapley waarde van dit spel.

(c) (5 pt.) Bepaal de kern van dit spel.

(d) (5 pt.) Bepaal de nucleolus van dit spel.

Laten we aannemen dat $m = 8$ en $n = 6$. Voor ze gaan bestellen, discussieren de drie welke verdelingsmethode ze gaan gebruiken. Er zijn 3 alternatieven. Methode 1: Zsa Zsa betaalt 16 euro voor haar 4 tapas en Alfredo en Billy betalen volgens de Shapley waarde van hun 2 persoon spel, dat je in (a) hebt uitgerekend. Methode II: ieder betaalt volgens de Shapley waarde van het 3 persoon spel. Methode III: ieder betaalt volgens de nucleolus van het 3 persoon spel.

(e) (5 pt.) Bepaal bij iedere methode hoeveel elke speler betaalt. Bepaal aan de hand daarvan voor elke speler de methode die hij/zij prefereert.

Opgave 3, 25 pt.
Beschouw het bimatrix spel (B, B'), met:

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} ,$$

waarbij B' de gespiegelde is van B.
Dit spel wordt oneindig vaak herhaald, waarbij we de gediscounte payoff π_i voor speler $i = 1, 2$, definieren als:

$$\pi_i = (1 - \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k p_i(t = k) ,$$

met $p_i(t = k)$ de payoff voor speler i op tijdstip k. Hierbij is $0 < \delta < 1$.
Definieer de volgende strategieën:
$COPY$: Op $t = 0$, speel Y. Op $t = k > 0$, kopieer de strategie die de andere speler speelde op $t = k - 1$.
$GRIM$: Op $t = 0$, speel Y. Op $t = k > 0$, speel Y dan en slechts dan als de geschiedenis tot dan er uit ziet als $YY, YY, \ldots, YY$. Anders speel X.

(a) (7 pt.) Bepaal alle $0 < \delta < 1$ waarvoor $(GRIM, GRIM)$ een NE is.

(b) (8 pt.) Bepaal alle $0 < \delta < 1$ waarvoor $(COPY, COPY)$ een NE is.

(c) (10 pt.) Bepaal alle $0 < \delta < 1$ waarvoor $(COPY, COPY)$ een SPE is.

Opgave 4, 25 pt.
Twee firma's produceren hetzelfde goed. De productiecyclus bestaat uit twee perioden. In de eerste periode heeft elke firma de beschikking over 100 eenheden kapitaal. Firma i (i=1,2) bepaalt dan hoeveel kapitaal $k_i \in [0, 100]$ ze wil investeren in research. Investering in research verlaagt de kostenfactor, volgens de formules

$$c_1(k_1, k_2) = \frac{1}{4}(200 - k_1 - 0.04\, k_1 k_2)\,, \quad c_2(k_1, k_2) = \frac{1}{4}(200 - k_2 - 0.04\, k_1 k_2)$$

De niet-lineaire term $k_1 k_2$ wordt verklaard door het feit dat de twee firma's in hun research gedeeltelijk samenwerken.
In de tweede periode gebruiken beide firma's hun gehele resterende kapitaal om te produceren. We nemen aan dat, voor elke firma, per eenheid kapitaal (k_i) precies één eenheid q_i van het goed wordt geproduceerd. De marktprijs van het goed wordt bepaald door de totale som van de productie:

$$P(q_1, q_2) = 200 - q_1 - q_2$$

De winst van een firma is gelijk aan $\pi_i = q_i(P - c_i)$, $i = 1, 2$.
NB: gebruik, waar mogelijk, een symmetrie argument.

(a) (5 pt.) Geef uitdrukkingen voor $\pi_i(k_1, k_2)$, $i = 1, 2$.

(b) (5 pt.) Bepaal, bij een gegeven waarde van $k_2 \in [0, 100]$, de best-reply $k_1 = \beta_1(k_2)$.

(c) (5 pt.) Bepaal, bij een gegeven waarde van $k_1 \in [0, 100]$, de best-reply $k_2 = \beta_2(k_1)$.

(d) (10 pt.) Bepaal de Nash evenwichten van dit spel.