Speltheorie

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

Naam: Her 2016

Opleiding / studierichting: .... Studentnr.: ....

Tentamen: .... Datum: .... Uitslag: ....

Opg 1

$$S = \begin{array}{c|cc} & X & Y \\ \hline A & 1^* & -1^* \\ B & 0^* & 3^* \end{array}$$

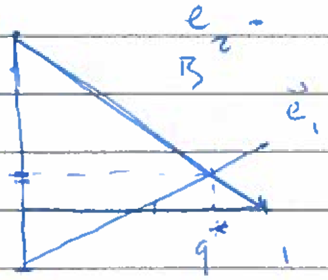
geen zadelpunt

a) $v(S)$ bepalen door ~~maximum~~ minimax strategie van sp2 uit te rekenen

Als sp 2 de str $\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$ speelt, is de payoff voor

sp 1: (zuiver A) $\vec{e}_1 \cdot S\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2q-1 \\ 3(1-q) \end{pmatrix} = 2q-1$

$\vec{e}_2 \cdot$ B $= 3(1-q)$



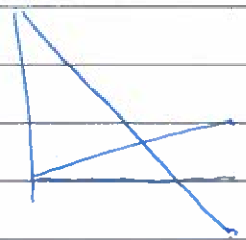
$2q-1 = -3q+3 \quad \rightarrow q^* = \frac{4}{5}$

Best ~~verdg~~ waarde $= \frac{3}{5}$

$\boxed{\text{str voor 2: } \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}}$

sp2: zuiver X $\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} \cdot Se_1 = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p$

Y $\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} \cdot Se_2 = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -4p+3$



$-4p+3 = p \quad \rightarrow \quad 5p = 3 \quad \rightarrow \quad p^* = \frac{3}{5}$

$\boxed{\text{waarde} = \frac{3}{5}}$

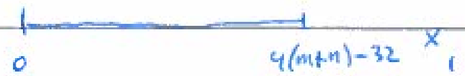
$\boxed{\text{str voor 1: } \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}}$

Opg 2 $\qquad 1 = A, \; 2 = B$

a)

S	$\emptyset$	1	2	3
$v(S)$	0	0	0	$4(m+n) - 32$

kern $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zdd $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 = \underbrace{4(m+n) - 32}_{\geq 8}$



Shapley

	1	2
1,2	0	...
2,1	...	0

$(x_1, x_2) = \underbrace{\left(2(m+n) - 16\right)}_{u(m,n)}(1,1)$

Nucleolus: $e(S, \vec{x}) = v(S) - x(S)$

maak excessen van $\{1\}$ en $\{2\}$ gelijk $\rightarrow$ nucleolus = Shapley.

A moet winst $u(m,n)$ krijgen
B

$\rightarrow \quad 4m - b_A = u(m,n) \quad \rightarrow \quad \cancel{b_A = 4(m,n) - 4m = 2(n-m) - 16}$

$b_A = 4m - u(m,n) = 2(m-n) + 16$

$b_B = 4n - u(m,n) = 2(n-m) + 16$

totaal betalen ze 32, klopt.

Naam: Speltheorie

Opleiding / studierichting: Her 2016 Studentnr.:

Tentamen: Datum: Uitslag:

Opg 2

b)

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	$4(m+n)-32$	$4m-16$	$4n-16$	$4(m+n)-32$

bijv $v(1,3) = 4m + 16 - 32$

bedrag A z.k   bedrag Z z.k   g/z. rekening m.k.

merk op dat $v(1,2) = v(123)$. Wat als Z minder dan 3 had besteld? Andere vraag

	1	2	3
123	0	$4(m+n)-32$	0
132	0	$4n-16$	$4m-16$
213	$4(m+n)-32$	0	0
231	$4m-16$	0	$4n-16$
312	$4m-16$	$4n-16$	0
321	$4n-16$	$4m-16$	0

$$\varphi = \frac{1}{6}\left(12m + 8n - 80,\ 8m + 12n - 80,\ 4m + 4n - 32\right)$$

c) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 4(m+n) - 32$

$x_1 + x_2 \geq 4(m+n) - 32$

$\rightarrow$ $x_3 = 0$ en $x_1 + x_2 = 4(m+n) - 32$

$x_1 \geq 4m - 16$

$x_2 \geq 4n - 16$

Gevolg: ~~$x_1 = 4m-16$~~ ~~$x_2 = \ldots$~~ $C = \{(4m-16, 4n-16, 0)\}$

d) Omdat de kern uit 1 element bestaat, is $N = (4m-16, 4n-16, 0)$.

e) $m=8$, $n=6$

Methode I $b_A = 2(m-n)+16 = 20$
$b_B = 2(n-m)+16 = 12$
$b_Z = 16$
totaal $= 48$ ✓

Methode II winst grote coalitie $= 4(m+n)-32 = 24$

winst $A = \frac{1}{6}(12m+8n-80) = \frac{32}{3}$

$B = \frac{1}{6}(8m+12n-80) = \frac{28}{3}$

$Z = \frac{1}{6}(4m+4n-32) = \frac{12}{3}$

$b_A = 4 \cdot m - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$

$b_B = 4n - \frac{28}{3} = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}$

$b_Z = 16 - \frac{12}{3} = \frac{36}{3} = 12$ totaal $= 48$ ✓

Methode III berekening als boven, met

winst $A = 4m-16 = 16$
$B = 4n-16 = 8$
$Z = 0$

$b_A = 4m-16 = 16$
$b_B = 4n-8 = 16$
$b_Z = 16-0 = 16$ ✓

A prefereert III
B I
Z II

Naam: Speltheorie

Opleiding / studierichting: Her 2016 Studentnr.:

Tentamen: Datum: Uitslag:

Opg 3

a) uitkomst GRIM vs GRIM: YY, YY, ...

payoffs: 2 voor sp1
2 voor sp2.

Stel sp1 wijkt op zeker moment af:
XY XX XX ...
$t=0$

We mogen doen alsof de afwijking plaats vond op $t=0$.

payoff 1: $(1-\delta)(3+\delta(-1)+\delta^2(-1)+\ldots) = (3-(\delta+\delta^2+\ldots))(1-\delta)$

$= (3-\delta(1+\delta+\ldots))(1-\delta) = 3(1-\delta) - \frac{\delta(1-\delta)}{1-\delta} = 3-4\delta$

Verbetering $\Leftrightarrow 3-4\delta > 2 \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{4}$

Wegens symmetrie geldt ook voor sp2 dat zij zich verbetert door af te wijken $\Leftrightarrow \delta < \frac{1}{4}$

Conclusie: GRIM vs GRIM is een NE $\Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$.

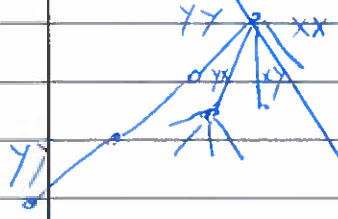
b) uitkomst COPY vs COPY: YY, YY, ...
zelfde payoffs als boven.
Stel sp1 wijkt op zeker moment af:

XY YX XY ... payoff 1 $= (1-\delta)(3+0\delta+3\delta^2+0\delta^3 \ldots$
$t=0$

$= 3(1-\delta)(1+\delta^2+\delta^4+\ldots) = 3(1-\delta)\frac{1}{(1-\delta^2)} = \frac{3}{1+\delta}$.

Verbetering $\Leftrightarrow \frac{3}{1+\delta} > 2 \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{2}$ Alweer wegens symmetrie: ~~[illegible]~~ COPY vs COPY is NE $\Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$.

c) wanneer is COPY vs COPY een SPE?



COPY is een memory-1 strategie. We hoeven alleen te kijken of COPY vs COPY een NE genereert in subtrees beginnend met:

XY : uitkomst XY YX XY ...

payoff 1 $= \frac{3}{1+\delta}$ payoff 2 $= (1-\delta)(0+3\delta+0\delta^2+3\delta^3+\dots)$
$= \frac{3\delta}{1+\delta}$

sp 1 wijkt af: YY YY ... payoff 1 = 2
$t=0$

verbetering $\Leftrightarrow 2 > \frac{3}{1+\delta} \Leftrightarrow \delta > \frac{1}{2}$ [illegible]

~~gegenereerd~~ sp 2 wijkt af: XX XX XX .. payoff 2 = −1

Nooit een verbetering.

Op een subboom

Naam: Speltheorie

Opleiding / studierichting: Her 2016 Studentnr.:

Tentamen: Datum: Uitslag:

c) COPY is een memory-1 strategie
We hoeven alleen te kijken voor welke $0<\delta<1$ COPY vs COPY een NE genereert in subbomen, afkomstig uit XY, YX en XX. (YY is al behandeld in b)) NB: voor subbomen uit XY en YX gelden geen symmetrieargument.

$\boxed{XY}$ YX XY YX . . . payoff $1 = (1-\delta)(0+3\delta+0\delta^2+\dots)$
$t=-1$ $t=0$

$= \frac{3\delta}{1+\delta}$

payoff $2 = \frac{3}{1+\delta}$

Afwijking 1 op $t=0$: XX XX . . .
payoff voor 1 $= -1$, voor geen enkele $0<\delta<1$ verbetering

Afwijking 2 op $t=0$: YY YY . . . , payoff voor $2 = 2$

verbetering $\Leftrightarrow \frac{3}{1+\delta} < 2 \Leftrightarrow \delta > \frac{1}{2}$

Conclusie 1: COPY vs COPY genereert een NE in subbomen afkomstig uit XY $\Leftrightarrow \delta \leq \frac{1}{2}$.

$\boxed{YX}$ XY YX . . . Dezelfde argumentatie als hierboven kan worden
$t=-1$

gevolgd, met de rol van spelers 1 en 2 omgedraaid. Dezelfde Conclusie geldt.

$\boxed{XX}$ XX . . . payoff $1 = -1$
$t=-1$ $t=0$

afwijking speler 1 op $t=0$:

$\underset{t=0}{YX}\ XY \ldots$ met payoff$_1$ $= \frac{3\delta}{1+\delta}$

Het is duidelijk dat voor alle $0<\delta<1$ afwijken een verbetering is voor sp 2. Dit inzicht is al voldoende om antwoord te geven op de vraag.

COPY vs COPY is voor geen enkele $0<\delta<1$ een SPE. In subbomen afkomstig uit XX kan sp1 (en trouwens ook sp2) zich voor al deze waarden verbeteren door een éénmalige afwijking.

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

(5)

Naam: Speltheorie

Opleiding / studierichting: Her 2016 Studentnr.:

Tentamen: Datum: Uitslag:

Opg 4 a) r_i = resterend kapitaal na investering $= 400 - k_i$.

productie van $i \equiv q_i = r_i = 100 - k_i$. Dus

$P(k_1, k_2) = 200 - (100-k_1) - (100-k_2) = k_1 + k_2$.

Dan wordt:

$\pi_1(k_1,k_2) = (100-k_1)(k_1 + k_2 - (50 - \frac{1}{4}k_1 - \frac{1}{100}k_1k_2))$

$= (100-k_1)(-50 + \frac{5}{4}k_1 + k_2 + \frac{1}{100}k_1k_2)$

en $\pi_2(k_1,k_2) = (100-k_2)(-50 + k_1 + \frac{5}{4}k_2 + \frac{1}{100}k_1k_2)$.

b) Firma 1 wil $\pi_1(k_1,k_2)$ maximaliseren, als functie van k_1. $\frac{\partial \pi_1}{\partial k_1} = 0 \rightarrow$

$\frac{\partial}{\partial k_1}\left(100(-50+k_2) + 175k_1 - (\frac{5}{4} + \frac{1}{100}k_2)k_1^2\right) = 0$

$\rightarrow k_1 = \beta_1(k_2) = \frac{175}{\frac{5}{2} + \frac{1}{50}k_2}$

c) Wegens symmetrie is $k_2 = \beta_2(k_1) = \frac{175}{\frac{5}{2} + \frac{1}{50}k_1}$

d) Wegens symmetrie moet voor een NE gelden $k_1^* = k_2^* = k^*$. Deze k^* is een oplossing van

$k = \frac{175}{\frac{5}{2} + \frac{1}{50}k} \Leftrightarrow \frac{1}{50}k^2 + \frac{5}{2}k - 175 = 0 \Rightarrow k^* = 50$

unieke positieve oplossing.