Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB272 werd in 2004/2005 gegeven door dr. P.H.M. van Mouche.

Speltheorie (WISB272)
5 juli 2005

Opgave 1

Bewijs of weerleg elk van de volgende beweringen.

a) Definitie: een deelverzameling Z van de verzameling der multi-strategieën van een spel in strategische vorm voldoet aan de uitwisselingseigenschap als voor elke $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Z$ ook elke multi-strategie $\mathbf{c}$ met $c^i \in \{a^i, b^i\}(i \in \mathcal{N})$ een element van Z is.

Bewering: er bestaat een nulsomspel waarvoor de verzameling der nash-evenwichten niet aan de uitwisselingseigenschap voldoet.

b) De verzameling der volledig coöperatieve multi-strategieën van een spel in strategische vorm voldoet aan de uitwisselingseigenschap.

c) Elk nash-evenwicht van een nulsomspel heeft dezelfde uitbetalingsvector.

d) Er bestaat geen spel in strategische vorm waarvoor elk der spelers i een minimaxuitbetaling v^i gelijk aan ∞ heeft.

e) Als d een dominante strategie voor speler i is en als z een andere strategie van die speler is, dan is het mogelijk dat d z niet zwak domineert.

f) Voor elk superadditief spel in karakteristieke functievorm geldt $v(\mathcal{N}) \geq v(S)$ voor alle $S \in 2^{\mathcal{N}}$.

g) Definitie: twee spelen v, v' in karakteristieke functievorm tussen N spelers heten strategisch equivalent als er een $k > 0$ en $c^1, \ldots, c^N \in \mathbb{R}$ bestaan, zó dat $v'(S) = k \cdot v(S) + \sum_{i \in S} c^i (S \in 2^{\mathcal{N}})$.

Bewering: twee strategisch equivalente spelen in karakteristieke functievorm hebben dezelfde core.

Opgave 2

De waarde van een zeker kunstvoorwerp dat in bezit is van speler 1 is a_i voor speler i waar $i = 1, 2, 3$. Neem aan dat $0 < a_1 < a_2 < a_3$, dus voor speler 3 is het het meeste waard en voor de speler die het bezit het minste.

a) Laat zien dat deze situatie gemodelleerd kan worden als een spel in karaktistieke functievorm $v : 2^{\{1,2,3\}} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = a_1, v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = a_2, v(\{1,3\}) = a_3, v(\{2,3\}) = 0, v(\{1,2,3\}) = a_3.$$

b) Is dit spel superadditief? En is het convex?

c) Geef de definitie van de core van een spel in karaktistieke functievorm en bepaal de core van het spel v.

Opgave 3

Een formeel grensoverschrijdend vervuilingsspel (fgv) tussen N landen, is een spel in strategische vorm $(X^1, \ldots, X^N; f^1, \ldots, f^N)$ tussen N spelers waar voor elke speler j:

- $X^j = [0, M^j]$ met $M^j > 0$;
- $f^j(x^1, \ldots, x^N) := \mathcal{P}^j(x^j) - \mathcal{D}^j(\sum_{l=1}^N T_{jl} x^l$ met alle $T_{jl} \geq 0, \mathcal{P}^j : [0, M^j] \to \mathbb{R}, \mathcal{D}^j : [0, r^j] \to \mathbb{R}$ en $r^j := \sum_{l=1}^N T_{jl} M^l$;
- $T_{jj} > 0$;
- $\mathcal{D}^j$ en $\mathcal{P}^j$ zijn continu;
- $\mathcal{D}^j$ is strikt stijgend en convex;
- $\mathcal{P}^j$ is strikt stijgend en strikt concaaf;

  En waar bovendien nog:
- $T := (T_{kl})$ is geen diagonaalmatrix.

Bewijs dat:

a) in een fgv elke conditionele uitbetalingsfunctie concaaf is;

b) in een fgv een uitbetalingsfunctie niet strikt concaaf hoeft te zijn;

c) in een fgv de totale uitbetalingsfunctie strikt concaaf is;

d) in een fgv de beste-antwoord-correspondentie singletonwaardig is;

e) een fgv een unieke volledig coöperatieve multi-strategie heeft;

f) elk fgv een nash-evenwicht heeft;

g) elk nash-evenwicht van een fgv pareto-efficiënt in de zwakke zin is als dat spel de volgende eigenschap heeft: er is een speler i waarvoor $T_{ij} = 0$ voor alle $j \neq i$. Geef ook een reële-wereld-interpretatie van die eigenschap.