

Speltheorie (WISB272) 25 februari

Schrijf je naam, adres en registratienummer op vel no. 1 en schrijf je naam ook bovenaan elk ander in te leveren vel.

Opgave 1

Bekijk het volgende spel met volledige informatie. Een stapel van N stenen dient door twee spelers te worden verwijderd. Speler 1 begint en de zetten van de spelers wisselen mekaar af. Speler 1 kan per zet 1,2 of 3 stenen verwijderen, terwijl speler 2 per zet 1,2,3 of 4 stenen kan verwijderen. De speler die de laatste steen verwijdert wint.

- (a) Bepaal de winnaar voor $N = 25$.
- (b) Idem voor $N = 31$.

Opgave 2

Bekijk de bimatrixspel

$$\begin{pmatrix} 1, 4 & -4/3, -4 \\ -3, -1 & 4, 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bepaal de winst (payoff) die speler 1 kan garanderen als hij enkel zuivere (pure) strategieën mag gebruiken.
- (b) Bepaal de winst (payoff) die speler 1 kan garanderen als hij ook gemengde strategieën mag gebruiken.
- (c) Maak een plaatje van de verzameling S van mogelijke winstvectoren (payoff vectors) van de spelers. Ga ervan uit dat beide spelers gemengde strategieën kunnen gebruiken en dat de winst niet overdraagbaar (nontransferable) is.
- (d) Bepaal de Pareto-grens van S .

Opgave 3

Speler Puzzel kiest één getal uit de getalen 1, 2, 3, 4, terwijl speler Raden probeert te raden wat het is. Als hij correct raadt, betaalt speler Puzzel 1 Euro aan Raden; als het getal dat Raden voorstelt te groot is, betaalt Puzzel 1/2 Euro aan Raden; en als het getal dat Raden voorstelt te klein is, is de winst nul.

- (a) Bepaal de matrix van het spel.
- (b) Beide spelers hebben optimale gemengde strategieën die een positieve waarschijnlijkheid geven aan elke zuivere strategie. Bepaal de waarde (value) van het spel en de optimale strategie van Puzzel.

Opgave 4

Speler 2 stopt in het geheim ofwel één, ofwel twee zwarte ballen in een urne, die al precies twee witte ballen bevat. Vervolgens wordt één ball “at random” (dus met gelijke waarschijnlijkheid) uit de urne getrokken en zijn kleur wordt aan speler 1 getoond. Dan moet speler 1 raden of speler 2 één dan wel twee zwarte ballen in de urne heeft gestopt. Speler 1 krijgt 1 Euro van speler 2 als de getrokken bal zwart was, en hij krijgt 1 Euro extra als hij correct raadt.

- (a) Teken de boom van het spel.
- (b) Breng het spel in strategische vorm.
- (c) Los het spel op.
- (d) Is de optimale strategie voor speler 1 van “behavioral” type?

Opgave 5

Vindt alle (zuivere en gemengde) Nash evenwichten in de volgende bimatrixspelen:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1, 1 & -1, 2 \\ 2, -1 & -2, -2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -1, -1 & 1, 1 \\ 2, -2 & -2, 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 2, 1 & 4, 0 & -1, 2 \\ 1, 0 & 0, 1 & 3, -2 \end{pmatrix}$$

(*Hint*: om de gemengde Nash-evenwichtsstrategieën te vinden, zoek naar strategieën die de winst van *tegenspeler* equaliseren. Voor (c) bekijk alle 2×2 deel-bimatrices.)

Opgave 6

Maak gebruik van superadditiviteit om te bewijzen dat de Shapleywaarde een imputatie is.

Opgave 7

Bekijk het 3-personen spel in coalitievorm met karakteristieke functie

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0; v(\{1\}) = 7; v(\{2\}) = 3; v(\{3\}) = 9; \\ v(\{1, 2\}) &= 24; v(\{1, 3\}) = 22; v(\{2, 3\}) = 18; v(\{1, 2, 3\}) = 39. \end{aligned}$$

- (a) Bereken de Shapleywaarde van het spel.
- (b) Behoort de Shapleywaarde tot de “core”?

Opgave 8

Een ronde cake met middelpunt O moet worden opgedeeld tussen twee spelers. Speler 1 snijdt langs een straal OA en terzelfdertijd snijdt speler 2 langs een straal OB . Speler 1 krijgt het stuk tussen OA en OB (in tegenwijzerzin) en speler 2 krijgt de rest. Elke speler wil de grootte van haar/zijn stuk maximaliseren.

- (a) Beschrijf de situatie als strategisch spel.
- (b) Is er een zuivere-strategie Nash evenwicht?
- (c) Vindt een gemengde-strategie Nash evenwicht. (*Hint*: zoek naar “equalisers”).