Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB311 werd in 2009/2010 gegeven door A.G. Henriques.

Complexe Functies (WISB311)
6 juli 2010

Opgave 1

a) Bereken met behulp van de residuen stelling de volgende integraal. Maak een plaatje van de contour die u gebruikt.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\sin\theta)^2} d\theta \quad , \quad a > 1$$

b) Bereken met behulp van de residuen stelling de volgende integraal. Maak een plaatje van de contour die u gebruikt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(16+x^4)} dx$$

Opgave 2

Beschouw de 1-dimensionale golf-vergelijking op het gebied $x \geq 0$:

$$\nabla^2\psi(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

met rand- en beginwaarden

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= 0\ ,\ x \geq 0 \\ \frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t} &= 0\ ,\ x > 0 \\ \psi(0,t) &= F(t)\ ,\ t > 0, \end{aligned}$$

met $F(t)$ een begrensde functie.

a) Definieer de Laplace getransformeerde van $\psi(t,x)$:

$$\hat{\psi}(s,x) = \int_0^{\infty} e^{-st}\psi(t,x)dt.$$

Bepaal een (gewone) differentiaal vergelijking voor $\hat{\psi}(s,x)$ en los deze op.
Houd rekening met de rand- en beginwaarden.

b) Bepaal nu $\psi(t,x)$ door een inverse Laplace transformatie.

c) Neem $F(t) = e^{-t}\sin t$. Schets $\psi(x,t)$ als functie van x, voor een vaste waarde van $t > 0$. Schets $\psi(x,t)$ als functie van t, voor een vaste waarde van $x > 0$.

Opgave 3

Een bol met straal 1 krijgt op $t = 0$ een delta-impuls, loodrecht op de Noordpool. Door deze impuls gaat het boloppervlak, dat voor $t < 0$ in rust was, kleine trillingen vertonen. De vergelijking voor de uitwijking van het oppervlak van de bol t.o.v. de ruststand, $\Psi(\phi,\theta,t)$, wordt bij benadering gegeven door de golfvergelijking:

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \delta(t)\frac{\delta(\theta)}{\sin\theta}.$$

U gaat deze vergelijking oplossen door een ontwikkeling in spherische harmonischen te substitueren. Omdat de oplossing onafhankelijk van ϕ zal zijn, vereenvoudigen we de aanname voor Ψ tot:

$$\Psi(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) P_n(\cos\theta).$$

a) Laat zien dat

$$\frac{\delta(\theta)}{\sin\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} P_n(\cos\theta),$$

waarbij u gebruik mag maken van het feit dat $\int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = 2\delta_{nm}/(2n+1)$ en dat $P_n(1) = 1$, voor alle n.

b) Substitueer de ontwikkelingen van Ψ en $\delta(\theta)/\sin\theta$ in de vergelijking en leid vergelijkingen af voor $a_n(t)$. U dient gebruik te maken van het feit dat $\nabla^2 P_n(\cos\theta) = -n(n+1) P_n(\cos\theta)$.

c) Los de vergelijkingen op, onder de aanname dat $a_n(t) = 0$ als $t < 0$.