Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB311 werd in 2003/2004 gegeven door Dr. E. van den Ban.

Complexe Functies (WISB311)
28 januari 2004

- **N.B.** Als je een stelling uit het boek gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Alle vier opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1. Deze opgave bestaat uit twee delen, (a) en (b), die onafhankelijk van elkaar zijn.

(a) Bepaal de eerste drie termen van de Laurentreeksontwikkeling van de functie

$$\frac{z+1}{z^2+1} \quad \text{rond het punt} \quad i.$$

(b) Gegeven is een functie f die holomorf is op een gereduceerde omgeving van een punt $\alpha \in \mathbb{C}$, d.w.z., er bestaat een $R > 0$ zo dat f holomorf is op $D(\alpha, R) \setminus \{\alpha\}$. Zij $0 < r < R$ en zij γ de cirkel rond α met straal r, georiënteerd tegen de klokrichting in. Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn.

(i) De functie f heeft een ophefbare singulariteit in α.

(ii) Voor elke holomorfe functie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ geldt:

$$\int_\gamma f(z)g(z)\, dz = 0.$$

Opgave 2. We beschouwen de integraal

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin t}\, dt.$$

(a) Toon aan dat er een meromorfe functie f op $\mathbb{C}$ bestaat zo dat geen der polen van f op de eenheidscirkel $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ligt, en zo dat

$$I = \int_S f(z)\, dz.$$

Hierbij is S georiënteerd tegen de klokrichting in.

(b) Bepaal alle polen van f, en voor elk daarvan: 1) de orde van de pool en 2) het residu van f in de pool.

(c) Bereken I.

Opgave 3. Voor elke $a \in \mathbb{R}$ en $R > 0$ definiëren we de krommen $\gamma_{a,R} : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ en $\sigma_{a,R} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ door

$$\gamma_{a,R}(t) = tR + ia \quad \text{en} \quad \sigma_{a,R}(t) = R + ita.$$

(a) Schets de beelden van $\gamma_{a,R}$ en $\sigma_{a,R}$.

(b) Toon aan dat voor elke $a \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_{a,R}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = 0.$$

(c) Toon aan dat voor elke $a \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{a,R}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Hierbij mag u de tweede identiteit als bekend veronderstellen.

(d) Toon aan dat voor elke $a \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-iax}\, dx = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}a^2}.$$

Opgave 4. In deze opgave noteren we $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ en $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(a) Laat zien dat voor elke holomorfe functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en elke $R > 1$ de volgende schatting van sup-normen geldt:

$$\|f'\|_{\bar{D}} \leq \frac{R}{(R-1)^2} \|f\|_{\bar{D}(0;R)}.$$

Gegeven is nu een rij $\{f_n\}$ van holomorfe functies $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die locaal uniform convergeert naar een limiet $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Voorts is gegeven dat f nergens op ∂D de waarde nul aanneemt.

(b) Beredeneer dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n'}{f_n} = \frac{f'}{f}, \quad \text{uniform op} \quad \partial D.$$

(c) Gegeven is dat de functie f precies p nulpunten heeft in D, geteld met multipliciteiten (hierbij is $p \in \mathbb{N}$). Toon aan dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor elke $n \geq N$ geldt: f_n heeft precies p nulpunten in D, geteld met multipliciteiten.