Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB311 werd in 2005/2006 gegeven door E.P. van den Ban.

Complexe Functies (WISB311)
20 maart 2006

Als je een stelling uit het boek gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, *ga dan toch door met de volgende onderdelen.* Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken. Alle vijf opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

We beschouwen een holomorfe functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a) Zij $z \in \mathbb{C}$ en S de positief georiënteerde cirkel met middelpunt z en straal 1. Geef een formule die de p-de orde afgeleide $f^{(p)}(z)$ uitdrukt in een integraal over S met in de integrand f en een bekende functie.

b) Veronderstel dat $|f(z)| \leq e^{\Re z}$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Laat zien dat voor elke $p \geq 1$ geldt dat

$$|f^{(p)}(z)| \leq 3\,p!\,e^{\Re z} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Opgave 2

a) Zij N een positief geheel getal. Laat zien dat door

$$r_N(z) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

een holomorfe functie op de schijf $|z| < N$ gedefinieerd wordt.

b) Laat zien dat door

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

een meromorfe functie op $\mathbb{C}$ gedefinieerd wordt.

c) Bepaal alle polen van f en voor elke pool de orde van de pool en het residu van f in de pool.

Opgave 3

We beschouwen de polynomiale functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = z^7 - 5z^5 + iz - 7 + i$.

a) Bepaal het aantal nulpunten (geteld met multipliciteiten) van f in het gebied $|z| < 2$.

b) Idem, in het gebied $2 < |z| < 3$.

c) Idem, in het gebied $1 < |z| < 2$.

Opgave 4

Laat $a > 2$ zijn. We beschouwen de integraal

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + 2\cos t}\, dt.$$

a) Toon aan dat er een rationale functie f op $\mathbb{C}$ bestaat zo dat geen der polen van f op de eenheidscirkel $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ligt, en zo dat

$$I = \int_S f(z)\, dz.$$

Hierbij is S georiënteerd tegen de klokrichting in.

b) Bewijs dat

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 4}}.$$

Opgave 5

Doel van deze opgave is het berekenen van de integraal

$$I = \int_0^\infty f(x)\, dx, \quad \text{met} \qquad f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{1 + x^4}.$$

Met U noteren we het complexe vlak met daaruit weggelaten de negatieve reële halfrechte $]-\infty, 0]$. De analytische voortzetting van de functie $x \mapsto \sqrt{x},\ ]0, \infty[\to \mathbb{R}$, tot U noteren we met $\sqrt{z}$.

a) Geef een formule voor $\sqrt{z}$ in termen van $\sqrt{|z|}$ en $\arg z$. Specificeer daarbij de toegelaten waarden van $\arg z$.

b) Laat zien dat de functie f voortgezet kan worden tot een meromorfe functie op U. Laat zien dat de voortzetting precies één pool α in het eerste kwadrant ($x > 0$ en $y > 0$) heeft en bewijs dat het residue in die pool gegeven wordt door

$$\mathrm{Res}_\alpha\ f = \frac{e^{\pi i/8}}{4i}.$$

c) Voor $0 < \varepsilon < R$ beschouwen we het lijnstuk geparametriseerd door $\gg_{\varepsilon,R}(t) = it$, voor $\varepsilon \leq t \leq R$. Bewijs dat:

$$\int_{\gg_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz = -e^{\pi i/4} \int_\varepsilon^R f(x)\, dx.$$

d) Bewijs dat

$$I = \frac{\pi}{4\cos(\frac{\pi}{8})}.$$

Besteed daarbij in het bijzonder aandacht aan de verantwoording van de vereiste limietname.