Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In electronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college COMPL werd in 2002/2003 gegeven door Prof. Dr. Looijenga.

Complexe Functies (COMPL)
december 2002

Schrijf uw naam op iedere pagina en uw studentnummer en emailadres op de eerste pagina. Beargumenteer uw oplossingen.

Opgave 1

Zij $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ een Laurentreeks.

a. Onderstel dat de reeks convergeert op de gepunkteerde schijf $0 < |z| < 1$. Bewijs dat f op dit gebied een holomorfe primitieve heeft dan en slechts dan als $a_{-1} = 0$.

b. Onderstel nu dat de reeks convergeert voor $|z| > 1$. Geef een nodig en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een holomorfe primitieve van f op $|z| > 1$ in termen van de Laurentcoefficiënten van f.

Opgave 2

Geef de Laurentontwikkeling op het ringgebied $1 < |z| < 2$ van de funktie $(z-1)^{-2}(z+2)^{-1}$.

Opgave 3

Laat $f(z) := z \tan z$. Bepaal de residuen van f en van f'/f in ieder punt van $\mathbb{C}$.

Opgave 4

Bepaal het aantal nulpunten van $z^4 + 3z^2 + z$ op de eenheidsschijf $|z| < 1$. Dezelfde vraag voor $z^4 + 2z^2 + z$.

Opgave 5

Bepaal voor $a > 0$ de integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{3 + 2\cos\theta}\, d\theta.$$

Opgave 6

Bestaat er een holomorfe funktie f gedefinieerd op $\mathbb{C} - [-1, 1]$ (d.w.z. het complement van het gesloten interval $[-1, 1]$ in $\mathbb{C}$) die voldoet aan $e^f = (z-1)(z+1)^{-1}$?