Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college WISB311 werd in 2005/2006 gegeven door E.P. van den Ban.

Complexe functies (WISB311)
30 januari 2006

- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het boek gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Alle vijf opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

We beschouwen het complexe bovenhalfvlak H bestaande uit de punten $z = x + i\,y$ met $y > 0$. Gegeven is een holomorfe functie $f : H \to \mathbb{C}$. Voor iedere $z \in H$ noteren we met S_z de gesloten cirkelschijf met middelpunt z en straal $\frac{1}{2}y$. We zien gemakkelijk in dat deze schijf in H ligt.

a) Zij $z \in H$. Druk de complexe afgeleide $f'(z)$ van f in het punt z uit in een integraal over de rand van S_z.

b) Veronderstel dat er constanten $C_0 > 0$ en $N \in \mathbb{N}$ bestaan zo dat $|f(z)| \leq C_0\,|y|^{-N}$ voor alle $z \in H$. Laat zien dat er een constante $C_1 > 0$ bestaat zo dat voor alle $z \in H$ geldt

$$|f'(z)| \leq C_1\,|y|^{-(N+1)}.$$

Opgave 2

We beschouwen het open halfvlak $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0\}$.

a) Laat zien dat door

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-z}}{(z-k)^2}$$

een holomorfe functie op $U \setminus \mathbb{N}$ gedefinieerd wordt.

b) Laat zien dat de functie f in ieder punt $n \in \{1, 2, \ldots\}$ een tweede orde pool heeft.

c) Bepaal $\mathrm{Res}_n\, f$ voor iedere $n \geq 1$.

Opgave 3

We beschouwen de polynomiale functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = z^7 + 7iz^6 - z + i$.

a) Bepaal het aantal nulpunten (geteld met multipliciteiten) van f binnen de cirkel met middelpunt 0 en straal $\frac{1}{2}$.

b) Idem, binnen de cirkel met middelpunt 0 en straal 1.

c) Bepaal een $R > 0$ zo dat alle nulpunten van f binnen de cirkel $|z| = R$ liggen. Bewijs de juistheid van uw bewering.

Opgave 4

We beschouwen de integraal

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\sin t}\, dt.$$

a) Toon aan dat er een rationale functie f op $\mathbb{C}$ bestaat zo dat geen der polen van f op de eenheidscirkel $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ligt, en zo dat

$$I = \int_S f(z)\, dz.$$

Hierbij is S georiënteerd tegen de klokrichting in.

b) Bereken I.

Opgave 5

Doel van deze opgaven is het berekenen van de integraal

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + x^2}\, dx.$$

We beschouwen de negatieve imaginaire halfas $L = \{iy \mid y \leq 0\}$ en zetten de functie $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ voort tot een complex differentieerbare functie $\mathbb{C} \setminus L \to \mathbb{C}$ die we noteren met $z \mapsto \sqrt[3]{z}$.

a) Geef een formule voor $\sqrt[3]{z}$ in termen van een geschikte keuze van $\log z$. Geef voorts een formule die $\sqrt[3]{-x}$ uitdrukt in $\sqrt[3]{x}$, voor $x > 0$.

Voor $a > 0$ noteren we met S_a de halve cirkelboog

$$S_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = a,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}.$$

b) Voor $R > 1$ en $0 < \varepsilon < 1$ beschouwen we de gesloten keten $\gamma_{\varepsilon,R}$ opgebouwd uit de reële intervallen $[-R, -\varepsilon]$, $[\varepsilon, R]$ en de halve cirkelbogen S_ε en S_R. We voorzien $\gamma_{\varepsilon,R}$ van de tegenklokse orientatie. Bepaal de integraal

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} \frac{\sqrt[3]{z}}{1 + z^2}\, dz.$$

c) Bewijs dat

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt[3]{z}}{1 + z^2}\, dz = 0, \qquad \lim_{R \to \infty} \int_{S_R} \frac{\sqrt[3]{z}}{1 + z^2}\, dz = 0.$$

d) Bepaal de integraal I.