Eindtentamen M & I, 28-6-12, 13:30-16:30

V **Opgave 1** [15 pt.] Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte en zij λ de Lebesgue maat op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zij $u : X \to \mathbb{R}$ een meetbare functie.

a. [5 pt.] Bewijs dat de verzameling $G := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = u(x)\}$ (dat wil zeggen: de *grafiek* van u) een $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-meetbare deelverzameling is van $X \times \mathbb{R}$.

b. [10 pt.] Bewijs $(\mu \times \lambda)(G) = 0$.

Opgave 2 [15 pt.] a. [7,5 pt.] Zij $f_n(x) := (1 + x^2)^{-1} n^2 x e^{-n^2 x^2}$. Bepaal $L_a := \lim_{n \to \infty} \int_{[a,\infty)} f_n(x) \lambda(dx)$ voor $a = 0$. Hier staat λ voor de Lebesgue maat op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Aanwijzing:* Maak "maattheoretisch-netjes" gebruik van de substitutie $y := nx$.

b. [7,5 pt.] Bepaal bovenstaande limietwaarde L_a ook voor $a > 0$.

Opgave 3 [30 pt.] Een *atoom* van een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ is een verzameling $A \in \mathcal{A}$ met de volgende eigenschap: als $B \subset A$ en $B \in \mathcal{A}$ dan of $B = \emptyset$ of $B = A$.

a. [5 pt.] Bewijs: als A een niet-leeg atoom is van $(X, \mathcal{A})$ en als $f : X \to \mathbb{R}$ een $\mathcal{A}$-meetbare functie is, dan bestaat er een $\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat $f(x) = \alpha$ voor alle $x \in A$.

Een *maat-atoom* van een maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ is een verzameling $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$, met de volgende eigenschap: als $B \subset A$ en $B \in \mathcal{A}$ dan of $\mu(B) = 0$ of $\mu(B) = \mu(A)$.

b. [15 pt.] Bewijs: als A een maat-atoom is van $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en als $f : X \to \mathbb{R}$ een $\mathcal{A}$-meetbare functie is, dan bestaat er een $\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat $f(x) = \alpha$ voor μ-bijna alle $x \in A$. *Aanwijzing:* Uiteraard geldt voor elke $\gamma \in \mathbb{R}$ en voor $A_\gamma := A \cap \{f \leq \gamma\}$ dat of $\mu(A_\gamma) = 0$ of $\mu(A_\gamma) = \mu(A)$. Zij C de verzameling van alle $\gamma \in \mathbb{R}$ met $\mu(A_\gamma) = 0$. Kies voor α dan het supremum van C; laat achtereenvolgens zien dat: (i) α welgedefinieerd is, (ii) α ook het maximum is van C (d.w.z. tot C behoort) door de definitie van supremum te gebruiken en (iii) α de gewenste eigenschap heeft.

c. [10 pt.] Beschouw [0, 1] de collectie $\mathcal{C}$, bestaande uit alle $C \subset [0, 1]$ waarvoor hetzij C hetzij $[0, 1] \backslash C$ (hoogstens) aftelbaar is. Definieer $\nu(C) := 0$ als C aftelbaar is en $\nu(C) := 1$ als $[0, 1] \backslash C$ aftelbaar is. Laat zien dat $([0, 1], \mathcal{C}, \nu)$ een maatruimte is en bepaal daarvan alle atomen en alle maat-atomen.

Opgave 4 [20 pt.] Laat f een Lebesgue integreerbare functie zijn op $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ met $\int_{(0,c)} f \, d\lambda = 0$ voor alle $c > 0$. Hier is λ de Lebesgue maat.

i. Bewijs dat $\int_{(a,b]} f \, d\lambda = 0$ voor alle a, $b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$.

ii. Bewijs dat $\int_I f^+ \, d\lambda = \int_I f^- \, d\lambda$ voor elke eindige disjuncte vereniging I van rechts halfgesloten en links halfopen intervallen in $\mathbb{R}_+$.

iii. Bewijs dat $\int_A f^+ \, d\lambda = \int_A f^- \, d\lambda$ voor elke $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

iv. Bewijs dat $f = 0$ b.o.

Opgave 5 [20 pt.] Je moet op twee manieren bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,n)} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx) = \frac{\pi}{2}$; die twee manieren worden hieronder beschreven. Uiteraard is λ hier de Lebesgue maat.

a. [10 pt.] Maak gebruik van de stelling van Fubini en het feit dat $\int_{(0,\infty)} e^{-tx} \lambda(dt) = \frac{1}{x}$ voor elke $x > 0$.

b. [10 pt.] Maak gebruik van het differentieerbaarheidslemma voor $F(t) := \int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx)$ en het feit dat $\int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx = (t^2+1)^{-1}$ (als je dit laatstgenoemde feit kunt afleiden krijg je 5 **extra punten**).