Uitwerking herkansingstentamen M & I, 23-8-12

Opgave 1 [15 pt] Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en zij $\{A_j\}_j$ een (aftelbare) rij van verzamelingen in $\mathcal{A}$ zo dat $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ voor alle i en j met $i \neq j$. Bewijs: $\mu(\cup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$.

Opgave 2 [25 pt] Onderzoek of voor $n \to \infty$ de rij $\int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n x^{1/n}} dx$ van waarden van oneigenlijke Riemann-integralen convergeert. Zoja, geef dan aan wat de limiet is en bewijs de convergentie ernaartoe; zonee, geef dan duidelijk aan waarom de convergentie faalt.

Opgave 3 [10 pt] Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte en zij $u : X \to \mathbb{R}_+$ een meetbare functie. Bewijs de identiteit $\int_X u \, d\mu = \int_{(0,\infty)} \mu(\{u \geq t\}) \lambda^1(dt)$, waarbij de de zinvolheid van de integraal aan de rechterkant tegelijk ook moet worden bewezen.

Opgave 4 Zij $(X, \mathcal{A}, \pi)$ een eindige maatruimte, met $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ een *algebra* op X zo dat $\sigma\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$.[1] In deze situatie geeft (het bewijs van) de uitbreidingsstelling van Carathédory het volgende extra resultaat: voor elke $A \in \mathcal{A}$ en elke $\epsilon > 0$ bestaat er een rij $\{A_n\}_n$ in $\mathcal{A}_0$ waarvoor $\pi(A \bigtriangleup (\cup_n A_n)) < \epsilon$ (dit hoef je uiteraard niet te bewijzen).
a [5 pt]. Bewijs dat dit de volgende approximatie-eigenschap impliceert: voor elke $A \in \mathcal{A}$ en elke $\epsilon > 0$ is er een $B \in \mathcal{A}_0$ met $\pi(A \bigtriangleup B) < \epsilon$.
b [5 pt]. Bewijs ook dat de approximatie-eigenschap in onderdeel a alsvolgt kan worden uitgebreid naar het geval waarin de maat π σ-eindig is: voor elke $A \in \mathcal{A}$ met $\pi(A) < \infty$ en elke $\epsilon > 0$ is er een $B \in \mathcal{A}_0$ met $\pi(A \bigtriangleup B) < \epsilon$.
c [5 pt]. Laat door een tegenvoorbeeld zien dat de uitgebreide approximatie-eigenschap in onderdeel b niet meer geldt als $\pi(A) = \infty$ zou worden toegestaan.
d (voor 10 extra punten). Laten μ en ν kansmaten op bovenstaande $(X, \mathcal{A})$ zijn, zo dat ν absoluut continu is ten opzichte van μ. Zij $\{A_n\}_n$ een rij in $\mathcal{A}$ waarvoor het volgende geldt: er is een $\alpha > 0$ zo dat $\lim_n \mu(A_n \cap B) \to \alpha\mu(B)$ voor elke $B \in \mathcal{A}_0$. Bewijs dan dat $\lim_n \nu(A_n) = \alpha$.

Opgave 5 Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een eindige maatruimte en zij $\{u_j\}_j$ een rij meetbare functies $u_j : X \to \mathbb{R}$.
a [12,5 pt.]. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn: (i) $\{u_j\}_j$ convergeert bijna overal naar nul, (ii) voor elke $\epsilon > 0$ geldt $\lim_{k\to\infty} \mu(\cup_{j=k}^\infty \{|u_j| \geq \epsilon\}) = 0$.
b (voor 12,5 extra punten). Gebruik onderdeel a om het volgende te bewijzen: (i) impliceert dat er voor elke $\epsilon > 0$ een verzameling $A \in \mathcal{A}$ bestaat met $\mu(A) < \epsilon$ en $\lim_j \sup_{x \in X \setminus A} |u_j(x)| = 0$.

[1] Ter herinnering: $\mathcal{A}_0$ heeft de eigenschappen (Σ_1), (Σ_2) van een σ-algebra, maar (Σ_3) geldt in verzwakte vorm: $\mathcal{A}_0$ is alleen gesloten voor *eindige* verenigingen van verzamelingen.