Uitwerking herkansingstentamen M & I, 23-8-12

Opgave 1 [15 pt] Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en zij $\{A_j\}_j$ een (aftelbare) rij van verzamelingen in $\mathcal{A}$ zo dat $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ voor alle i en j met $i \neq j$. Bewijs: $\mu(\cup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$.

Bewijs. Zoals zo vaak probeer je om de verzameling "waardoor/waarop het verkeerd gaat"(in dit geval is "het" de σ-additiviteit) te bepalen en af te zonderen (hopelijk als nulverzameling). Kies daarom $E := \cup_{i,j,i<j} A_i \cap A_j$; als vereniging van aftelbaar veel nulverzamelingen is dit zelf ook een nulverzameling. Vorm $A'_i := A_i \backslash E$ voor alle i. Dan $A'_i \cap A'_j = \emptyset$ voor alle i en j met $i \neq j$; dus $\mu(\cup_i A'_i) = \sum_i \mu(A'_i)$. Wegens $\cup_i A'_i = (\cup_i A_i)\backslash E$ verkrijg je $\mu(\cup_i A'_i) = \mu(\cup_i A_i)$ uit $\mu(E) = 0$. En $\mu(A'_i) = \mu(A_i)$ volgt om dezelfde reden. Conclusie: $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$.

Opgave 2 [25 pt] Onderzoek of voor $n \to \infty$ de rij $\int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n x^{1/n}} dx$ van waarden van oneigenlijke Riemann-integralen convergeert. Zoja, geef dan aan wat de limiet is en bewijs de convergentie ernaartoe; zonee, geef dan duidelijk aan waarom de convergentie faalt.

Oplossing. Kies alvast $n \geq 2$. De niet-negatieve functie $f_n(x) := \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n x^{1/n}}$ is op $(0, 1)$ van boven begrensd door $x^{-1/2}$ en laatstgenoemde functie is daar Lebesgue-integreerbaar (zie Example 11.13). Verder geldt $f_n(x) \leq (1 + \frac{x}{n})^{-n}$ op $[1, \infty)$. Wegens $(1 + \frac{x}{n})^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}(\frac{x}{n})^2 + \cdots \geq \frac{1}{4}x^2$ volgt $f_n(x) \leq 4/x^2$ op $[1, \infty)$ en $x \mapsto 4/x^2$ is daar Lebesgue-integreerbaar (zie Example 11.13). Eerste conclusie: wegens Corollary 11.9 is voor elke n de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n x^{1/n}} dx$ gelijk aan de Lebesgue integraal $\int_{(0,\infty)} f_n \, d\lambda^1$. Tweede conclusie: de LDCT mag worden toegepast en dat geeft $\lim_n \int_{(0,\infty)} f_n \, d\lambda^1 = \int_{(0,\infty)} \lim_n f_n \, d\lambda^1$. Nu geldt $\lim_n f_n(x) = e^{-x}$ voor elke $x > 0$ (want $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$ en $x^{1/n} \to 1$). De gevraagde limiet is dus $\int_{(0,\infty)} e^{-x} \lambda^1(dx) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$.

Opgave 3 [10 pt] Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte en zij $u : X \to \mathbb{R}_+$ een meetbare functie. Bewijs de identiteit $\int_X u \, d\mu = \int_{(0,\infty)} \mu(\{u \geq t\})\lambda^1(dt)$, waarbij de de zinvolheid van de integraal aan de rechterkant tegelijk ook moet worden bewezen.

Deze opgave is precies gelijk aan Theorem 13.11 en het korte bewijs ervan (m.b.v. Tonelli-Fubini) is te vinden op p. 128.

Opgave 4 Zij $(X, \mathcal{A}, \pi)$ een eindige maatruimte, met $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ een *algebra* op X zo dat $\sigma\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$.[1] In deze situatie geeft (het bewijs van) de uitbreidingsstelling van Carathédory het volgende extra resultaat: voor elke $A \in \mathcal{A}$ en elke $\epsilon > 0$ bestaat er een rij $\{A_n\}_n$ in $\mathcal{A}_0$ waarvoor $\pi(A \bigtriangleup (\cup_n A_n)) < \epsilon$ (dit hoef je uiteraard niet te bewijzen).
a [5 pt]. Bewijs dat dit de volgende approximatie-eigenschap impliceert: voor elke $A \in \mathcal{A}$ en elke $\epsilon > 0$ is er een $B \in \mathcal{A}_0$ met $\pi(A \bigtriangleup B) < \epsilon$.
b [5 pt]. Bewijs ook dat de approximatie-eigenschap in onderdeel a alsvolgt kan worden uitgebreid naar het geval waarin de maat π σ-eindig is: voor elke $A \in \mathcal{A}$ met $\pi(A) < \infty$ en elke $\epsilon > 0$ is er een $B \in \mathcal{A}_0$ met $\pi(A \bigtriangleup B) < \epsilon$.
c [5 pt]. Laat door een tegenvoorbeeld zien dat de uitgebreide approximatie-eigenschap in onderdeel b niet meer geldt als $\pi(A) = \infty$ zou worden toegestaan.
d (voor 10 extra punten). Laten μ en ν kansmaten op bovenstaande $(X, \mathcal{A})$ zijn, zo dat ν absoluut continu is ten opzichte van μ. Zij $\{A_n\}_n$ een rij in $\mathcal{A}$ waarvoor het volgende geldt: er is een $\alpha > 0$ zo dat $\lim_n \mu(A_n \cap B) \to \alpha\mu(B)$ voor elke $B \in \mathcal{A}_0$. Bewijs dan dat $\lim_n \nu(A_n) = \alpha$.

Oplossing. a. Geef A en ϵ zoals beschreven en zij $C := \cup_n A_n$ zoals gegarandeerd in de aanhef, maar corresponderend met $\epsilon/2$, en noteer $B_N := \cup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{A}_0$. Dan $\pi(A \bigtriangleup C) < \epsilon/2$, zoals gesteld. Uit $A \bigtriangleup B_N \subset (A \bigtriangleup C) \cup (C \bigtriangleup B_N)$ en subadditiviteit van π (Proposition 4.3(v)) volgt dan $\pi(A \bigtriangleup B_N) < \epsilon$ voor N groot genoeg, want $B_N \uparrow C$ impliceert $\pi(B_N) \uparrow \pi(C)$.

[1] Ter herinnering: $\mathcal{A}_0$ heeft de eigenschappen (Σ_1), (Σ_2) van een σ-algebra, maar (Σ_3) geldt in verzwakte vorm: $\mathcal{A}_0$ is alleen gesloten voor *eindige* verenigingen van verzamelingen.

b. Per gegeven bestaan er (hoogstens) aftelbaar veel $E_j \in \mathcal{A}$, onderling disjunct, met $\pi(E_j) < \infty$ en $\cup_j E_j = X$. Laten $A \in \mathcal{A}$ met $\pi(A) < \infty$ en $\epsilon > 0$ willekeurig zijn. Dan kun je op elke $E_j \cap A$ onderdeel a toepassen (beschouw E_j, uitgerust met $E_j \cap \mathcal{A}$ en $\pi' := \pi(E_j \cap \cdot)$ afzonderlijk als (eindige) maatruimte – zie Example 3.3(vi)). Dan volgt daaruit het bestaan van een $B_j \in \mathcal{A}_0$ met $\pi(A \triangle B_j) < \frac{\epsilon}{2^j}$, zodat volgt $\pi(A \triangle \cup_j B_j) < \epsilon$. Maar dan volgt ook $\pi(A \triangle \cup_{j=1}^N B_j) < \epsilon$ voor N groot genoeg. Wegens $\cup_{j=1}^N B_j \in \mathcal{A}_0$, is het bewijs af.

c. Neem $X := \mathbb{N}$, $\mathcal{A} :=$ collectie van alle (hoogstens) aftelbare en co-aftelbare deelverzamelingen en $\mathcal{A}_0 :=$ collectie van alle eindige en co-eindige deelverzamelingen (bekend van o.a. college). Kies voor π de telmaat; deze is σ-eindig op $(X, \mathcal{A})$. Er geldt $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$, want de singletons, die $\mathcal{A}$ genereren als σ-algebra, behoren ook tot $\mathcal{A}_0$ (en dus tot $\sigma(\mathcal{A}_0)$). Kies tenslotte (bijvoorbeeld) $A := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; dan $\pi(A) = \infty$. De approximatie-eigenschap kan voor deze $A \notin \mathcal{A}_0$ niet gelden, want voor $\epsilon < 1$ impliceert $\pi(A \triangle B) < \epsilon$ de identiteit $A = B$.

d. Volgens de stelling van Radon-Nikodym is er een integreerbare, niet-negatieve functie f zo dat $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ voor alle $A \in \mathcal{A}$. Je past het drie-stappen procédé toe:

Stap 1: $f = 1_D$ voor zekere $D \in \mathcal{A}$. Nu is gegeven dat $\nu(A) = \mu(D \cap A)$ voor alle A (in het bijzonder geeft dat $\mu(D) = 1$ voor $A = X$). Je moet hier bewijzen $\mu(D \cap A_n) \to \alpha$. Als D in $\mathcal{A}_0$ zit, volgt dit direct uit het gegeven voor de rij $\{A_n\}_n$, maar als $D \notin \mathcal{A}_0$ moet je onderdeel a gebruiken. Voor willekeurige $\epsilon > 0$ is er een $D_\epsilon \in \mathcal{A}_0$ met $\mu(D \triangle D_\epsilon) < \epsilon$. Wegens $D \cap A_n \subset (D_\epsilon \cap A_n) \cup (D \triangle D_\epsilon)$ geeft dat $\mu(D \cap A_n) \le \mu(D_\epsilon \cap A_n) + \epsilon$ (gebruik weer subadditiviteit zoals in Proposition 4.3(v)). Dus volgt $\limsup_n \mu(D \cap A_n) \le \alpha\mu(D_\epsilon) + \epsilon$ uit het gegeven. Wegens $\mu(D_\epsilon) \le \mu(D) + \epsilon$ (een direct gevolg van $D_\epsilon \subset D \cup (D \triangle D_\epsilon)$) krijg je zo $\limsup_n \mu(D \cap A_n) \le \alpha\mu(D) + 2\epsilon$. Anderzijds geldt ook $D_\epsilon \cap A_n \subset (D \cap A_n) \cup (D \triangle D_\epsilon)$, zodat diezelfde subadditiviteit leidt tot $\mu(D \cap A_n) \ge \mu(D_\epsilon \cap A_n) - \epsilon$, en dus tot $\liminf_n \mu(D \cap A_n) \ge \alpha\mu(D) - 2\epsilon$. Door ϵ vervolgens naar nul te laten gaan, krijg je $\limsup_n \mu(D \cap A_n) \le \alpha\mu(D) \le \liminf_n \mu(D \cap A_n)$. Conclusie: $\lim_n \mu(D \cap A_n) = \alpha\mu(D)$, hetgeen moest worden bewezen, want hier geldt $\mu(D) = 1$ (zie boven).

Stap 2: f is een simpele functie: $f = \sum_i c_i 1_{D_i}$. Nu is gegeven dat $\nu(A) = \sum_i c_i \mu(D_i \cap A)$ voor alle A (en in het bijzonder geeft dat $\sum_i c_i \mu(D_i) = 1$ voor $A = X$). Bewezen moet worden $\sum_i c_i \mu(D_i \cap A_n) \to \alpha$. Maar door stap 1 weet je voor elke i al dat $\lim_n \mu(D_i \cap A_n) = \alpha\mu(D_i)$, dus volgt $\lim_n \sum_i c_i \mu(D_i \cap A_n) = \alpha \sum_i c_i \mu(D_i)$ uit basis-eigenschappen van limieten. Dit moest worden bewezen, want $\sum_i c_i \mu(D_i) = 1$.

Stap 3: algemene geval. De functie f is een monotone limiet van simpele functies zoals behandeld in stap 2. Zij $\{f_k\}_k$ zo'n rij; dan geeft stap 2 voor elke k de identiteit $\lim_n \int_{A_n} f_k \, d\mu = \alpha \int_X f_k \, d\mu$. Nu volgt het bewijs uit

$$\nu(A_n) - \alpha = \int_{A_n} f \, d\mu - \alpha \underbrace{\int_X f \, d\mu}_{=1} = \underbrace{\int_{A_n} f_k \, d\mu - \alpha \int_X f_k \, d\mu}_{I_{k,n}} + \underbrace{\int_{A_n} (f - f_k) d\mu - \alpha \int_X (f - f_k) d\mu}_{II_{k,n}}.$$

Neem namelijk eerst, voor een willekeurig gekozen ϵ, k zo groot dat $\int_X |f_k - f| d\mu < \epsilon$; dan heb je $|II_{k,n}| \le \epsilon + \alpha\epsilon$ voor alle n. Vervolgens geeft stap 2 dan $\lim_n I_{k,n} = 0$, zodat volgt $\limsup_n |\nu(A_n) - \alpha| \le (1 + \alpha)\epsilon$. Via $\epsilon \downarrow 0$ krijg je dan $\limsup_n |\nu(A_n) - \alpha| \le 0$, en dus $\lim_n |\nu(A_n) - \alpha| = 0$, hetgeen te bewijzen was.

Opgave 5 Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een eindige maatruimte en zij $\{u_j\}_j$ een rij meetbare functies $u_j : X \to \mathbb{R}$.
a [12,5 pt.]. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn: (i) $\{u_j\}_j$ convergeert bijna overal naar nul, (ii) voor elke $\epsilon > 0$ geldt $\lim_{k \to \infty} \mu(\cup_{j=k}^\infty \{|u_j| \ge \epsilon\}) = 0$.
b (voor 12,5 extra punten). Gebruik onderdeel a om het volgende te bewijzen: (i) impliceert dat er voor elke $\epsilon > 0$ een verzameling $A \in \mathcal{A}$ bestaat met $\mu(A) < \epsilon$ en $\lim_j \sup_{x \in X \setminus A} |u_j(x)| = 0$.

Bewijs. a. Schrijf $B_k := \cup_{j=k}^\infty A_j$ en $A_j := \{|u_j| \ge \epsilon\}$), dan $B_k \downarrow \cap_k \cup_{j \ge k} A_j = \limsup_j A_j$. Er geldt $x \in \limsup_j A_j$ d.e.s.d.a. $x \in A_j$ voor oneindig veel j (zie ook Exercise 6.9), wat op zijn beurt equivalent is met $|u_j(x)| \not\to 0$ (d.w.z. met $\limsup_j |u_j(x)| > 0$). Dus (i) impliceert dat $\limsup_j A_j$ bevat is in een nulverzameling, en dan volgt $\mu(B_k) \downarrow 0$ uit de continuiteit van boven van de eindige maat μ. Omgekeerd volgt uit (ii) dat $\mu(\limsup_j A_j)$ gelijk is aan nul, dus dat $\limsup_j A_j = \{u_j \not\to 0\}$ een nulverzameling is.

b. Volgens onderdeel a geldt (ii). Dus voor elke $\eta > 0$ geldt $\lim_{k\to\infty} \mu(\cup_{j=k}^{\infty}\{|u_j| \geq \eta\}) = 0$. Zij $\epsilon > 0$. I.h.b. is er voor elke $\eta := 2^{-p}$, $p \in \mathbb{N}$, een K_p met $\mu(\cup_{j=k}^{\infty}\{|u_j| \geq 2^{-p}\}) < \epsilon 2^{-p}$ als $k \geq K_p$. Vorm $A_\epsilon := \cup_p \cup_{j\geq K_p} \{|u_j| \geq 2^{-p}\}$; dan $\mu(A_\epsilon) \leq \sum_p \epsilon 2^{-p} < \epsilon$. Er volgt voor elke $x \in X\backslash A_\epsilon$ en elke $p \in \mathbb{N}$ dat $|u_j(x)| < 2^{-p}$ voor alle $j \geq K_p$. Dit impliceert $\lim_j \sup_{x\in X\backslash A_\epsilon} |u_j(x)| = 0$; immers, bij elke willekeurig gekozen $\delta > 0$ is er een q met $2^{-q} < \delta$. Dus is er een K (namelijk $K = K_q$) zo dat voor alle $j \geq K$ geldt $\sup_{x\in X\backslash A_\epsilon} |u_j(x)| < 2^{-q} < \delta$.