Uitwerking Tweede Quiz M & I, 24-5-12

Opgave 1 [30 pt]. a. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een eindige maatruimte en zij $u : X \to \mathbb{R}_+$ een meetbare functie met de volgende eigenschap: voor elke $\epsilon > 0$ en elke $B \in \mathcal{A}$ met $\mu(B) > 0$ is er een $B' \in \mathcal{A}$ met $B' \subset B$, $\mu(B') > 0$, en $\int_{B'} u\, d\mu \le \epsilon\mu(B')$. Bewijs: dan geldt $u = 0$ b.o.

b. Laat zien d.m.v. een tegenvoorbeeld: de implicatie in onderdeel a is niet geldig als zou worden toegestaan dat $\mu(X)$ oneindig is.

Opgave 2 [35 pt]. a. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een eindige maatruimte en zij $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ een rij van $\mathcal{A}$-meetbare functies $u_j : X \to \mathbb{R}$. Bewijs de equivalentie van de volgende twee uitspraken.

(i) Voor elke $\epsilon > 0$ geldt $\lim_{j\to\infty} \mu(\{|u_j| \ge \epsilon\}) = 0$,

(ii) $\lim_{j\to\infty} \int_X \frac{|u_j|}{1+|u_j|} d\mu = 0$.

b. Laat zien: de equivalentie in onderdeel a is niet geldig als $\mu(X) = +\infty$ zou worden toegestaan. Doe dit door middel van een geschikt tegenvoorbeeld.

Opgave 3 [35 pt]. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Uit opgave 9.11 weet je dat een *kern* een afbeelding $N : X \times \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ is met de volgende twee eigenschappen: (1) voor elke $x \in X$ is $A \mapsto N(x, A)$ een maat op $(X, \mathcal{A})$ en (2) voor elke $A \in \mathcal{A}$ is $x \mapsto N(x, A)$ een meetbare functie.
a. Bewijs wat je ook in opgave 9.11 moest bewijzen:
(i) $\nu : A \mapsto \int_X N(x, A)\mu(dx)$ is een maat op $(X, \mathcal{A})$
(ii) $v : x \mapsto \int_X u(y)N(x, dy)$ is een meetbare functie voor elke $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$
(iii) $\int_X u d\nu = \int_X v d\mu$.
b. Zij $M : X \times \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ook een kern (deze heeft dus dezelfde eigenschappen (1)-(2) als N). Bewijs: $R(x, A) := \int_X N(x, dy)M(y, A)$ definieert een kern $R : X \times \mathcal{A} \to [0, +\infty]$.
c. Zij $x \in X$ en zij $w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Geef een formule voor $\int_X w(z)R(x, dz)$ waarin de kernen N en M uit b voorkomen (maar niet meer R) en bewijs die formule.