Uitwerking Tweede Quiz M & I, 24-5-12

Opgave 1 [30 pt]. a. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een eindige maatruimte en zij $u : X \to \mathbb{R}_+$ een meetbare functie met de volgende eigenschap: voor elke $\epsilon > 0$ en elke $B \in \mathcal{A}$ met $\mu(B) > 0$ is er een $B' \in \mathcal{A}$ met $B' \subset B$, $\mu(B') > 0$, en $\int_{B'} u\, d\mu \le \epsilon\mu(B')$. Bewijs: dan geldt $u = 0$ b.o.

b. Laat zien d.m.v. een tegenvoorbeeld: de implicatie in onderdeel a is niet geldig als zou worden toegestaan dat $\mu(X)$ oneindig is.

Oplossing. a. Zij $B_j := \{u \ge \frac{1}{j}\}$. Wegens $B_j \uparrow \{u > 0\}$ is het voldoende om te laten zien dat voor elke j geldt: $\mu(B_j) = 0$. Je bewijst dit met tegenspraak: stel er was een j met $\mu(B_j) > 0$. Wegens het gegeven zou er dan een meetbare $B_j' \subset B_j$ zijn met $\mu(B_j') > 0$ en $\int_{B_j'} u\, d\mu \le \frac{1}{2j}\mu(B_j')$. Maar wegens $\int_{B_j'} u\, d\mu \ge \frac{1}{j}\mu(B_j')$ (en $\mu(B_j) < \infty$!) geeft dit $\frac{1}{j} \le \frac{1}{2j}$ en dus volgt tegenspraak.

b. Neem $\mathcal{A} := \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, uitgerust met $\mu(\emptyset) := 0$ en $\mu(X) := \infty$. De enige meetbare $u : X \to \mathbb{R}_+$ zijn de niet-negatieve constante functies $u \equiv c$. Maar voor bijvoorbeeld $c = 2$ geldt dat voor elke $\epsilon > 0$ en elke $B \in \mathcal{A}$ met $\mu(B) > 0$ (d.w.z., met $B = X$) er een $B' \subset B$ is (namelijk X zelf), waarvoor geldt $\infty = 2\mu(X) = \int_{B'} u \le \epsilon\mu(X) = \infty$. En toch geldt niet $u = 0$ b.o.

Opgave 2 [35 pt]. a. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een eindige maatruimte en zij $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ een rij van $\mathcal{A}$-meetbare functies $u_j : X \to \mathbb{R}$. Bewijs de equivalentie van de volgende twee uitspraken.

(i) Voor elke $\epsilon > 0$ geldt $\lim_{j\to\infty} \mu(\{|u_j| \ge \epsilon\}) = 0$,

(ii) $\lim_{j\to\infty} \int_X \frac{|u_j|}{1+|u_j|} d\mu = 0$.

b. Laat zien: de equivalentie in onderdeel a is niet geldig als $\mu(X) = +\infty$ zou worden toegestaan. Doe dit door middel van een geschikt tegenvoorbeeld.

Oplossing. a. $(i) \Rightarrow (ii)$: Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. De functie $\xi \mapsto \frac{\xi}{1+\xi}$ is strikt stijgend op $\mathbb{R}_+$ en van boven begrensd door 1. Dus volgt voor elke j

$$0 \le \int_X \frac{|u_j|}{1+|u_j|} d\mu \le \int_{\{|u_j|<\epsilon\}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} d\mu + \int_{\{|u_j|\ge\epsilon\}} 1 d\mu.$$

De eerste term rechts wordt gemajoreerd door $\epsilon\mu(X)$ en (i) zegt dat de tweede term rechts naar nul gaat. Dus volgt het gevraagde (mede dankzij $\mu(X) < \infty$).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Op de verzameling $\{|u_j| \ge \epsilon\}$ geldt $\frac{|u_j|}{1+|u_j|} \ge \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. Dus

$$\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\mu(\{|u_j| \ge \epsilon\}) \le \int_{\{|u_j|\ge\epsilon\}} \frac{|u_j|}{1+|u_j|} d\mu \le \int_X \frac{|u_j|}{1+|u_j|} d\mu \to 0$$

toont het gevraagde aan.

b. Bovenstaand commentaar geeft al aan dat het tegenvoorbeeld moet gaan over $(i) \not\Rightarrow (ii)$. Je zoekt dus een rij $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ die wel voldoet aan (i), maar niet aan (ii). Neem nogmaals $\mathcal{A} := \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, uitgerust met $\mu(\emptyset) := 0$ en $\mu(X) := \infty$, en kies $u_j \equiv \frac{1}{j}$. Voor elke $\epsilon > 0$ geldt dan dat $\{|u_j| \geq \epsilon\} = \emptyset$ voor alle $j > \frac{1}{\epsilon}$, dus is aan (i) voldaan. Echter, wegens

$$\int_X \frac{|u_j|}{1+|u_j|} d\mu = \frac{1}{j+1}\mu(X) = \infty$$

voor elke j, geldt (ii) nu niet.

Opgave 3 [35 pt]. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Uit opgave 9.11 weet je dat een *kern* een afbeelding $N : X \times \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ is met de volgende twee eigenschappen: (1) voor elke $x \in X$ is $A \mapsto N(x, A)$ een maat op $(X, \mathcal{A})$ en (2) voor elke $A \in \mathcal{A}$ is $x \mapsto N(x, A)$ een meetbare functie.
a. Bewijs wat je ook in opgave 9.11 moest bewijzen:
(i) $\nu : A \mapsto \int_X N(x, A)\mu(dx)$ is een maat op $(X, \mathcal{A})$
(ii) $v : x \mapsto \int_X u(y)N(x, dy)$ is een meetbare functie voor elke $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$
(iii) $\int_X u d\nu = \int_X v d\mu$.
b. Zij $M : X \times \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ook een kern (deze heeft dus dezelfde eigenschappen (1)-(2) als N). Bewijs: $R(x, A) := \int_X N(x, dy)M(y, A)$ definieert een kern $R : X \times \mathcal{A} \to [0, +\infty]$.
c. Zij $x \in X$ en zij $w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Geef een formule voor $\int_X w(z)R(x, dz)$ waarin de kernen N en M uit b voorkomen (maar niet meer R) en bewijs die formule.

Oplossing. a. De oplossing van a is op het internet te vinden.

b. Om te beginnen is $R(x, A)$ welgedefinieerd voor elke $x \in X$ en $A \in \mathcal{A}$: immers, $u := M(\cdot, A)$ behoort tot $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ wegens de eigenschappen van de kern M, en $N(x, \cdot)$ is een maat (eigenschap (1) van de kern N). Je laat vervolgens zien dat R de twee gewenste eigenschappen heeft.

Eigenschap (1): Kies $x \in X$ vast en noteer $\pi := N(x, \cdot)$; π is een maat op $(X, \mathcal{A})$ wegens eigenschap (1) van de kern N. Zij $(A_j)_j$ een aftelbare rij van onderling disjuncte verzamelingen in $\mathcal{A}$. Je moet aantonen dat geldt

$$\int_X N(x, dy)M(y, A) = \sum_j \int_X N(x, dy)M(y, A_j) \tag{1}$$

met $A := \dot{\cup}_j A_j$. Nu geldt $u(y) := M(y, A) = \sum_j M(y, A_j) = \sum_j u_j(y)$ wegens eigenschap (1) van de kern M, waarbij $u := M(\cdot, A)$ en $u_j := M(\cdot, A_j)$ niet-negatieve meetbare functies zijn. Uit Corollary 9.9 volgt dan $\int_X u \, d\pi = \sum_j \int_X u_j \, d\pi$, wat equivalent is met (1).

Eigenschap (2): voor vaste $A \in \mathcal{A}$ is $u := y \mapsto M(y, A)$ een $\mathcal{A}$-meetbare functie. Dus volgt de meetbaarheid van $R(x, A) := \int_X N(x, dy)M(y, A)$ uit onderdeel a, deel (ii).

c. De vereiste alternatieve formule voor $\int_X w(z)R(x, dz)$ is

$$\int_X [\int_X w(z)M(y, dz)]N(x, dy)$$

Je bewijst dit met het gebruikelijke stappenprocédé:

Stap 1: $w = 1_A$. De alternatieve formule geldt hier per definitie van R.

Stap 2: $w = \sum_{i=1}^N c_i 1_{A_i}$. Nu is $\int_X w(z)R(x,dz) = \sum_{i=1}^N c_i R(x,A_i)$ en dat is gelijk aan de alternatieve formule $\int_X [\int_X w(z)M(y,dz)]N(x,dy) = \sum_{i=1}^N c_i \int_X M(y,A_i)N(x,dy)$.

Stap 3: algemene $w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Dan geldt $w = \lim_j \uparrow w_j$ met w_j stapfuncties zoals in stap 2. Dan volgt met de MCT dat

$$\lim_j \uparrow \int_X \underbrace{[\int_X w_j(z)M(y,dz)]}_{g_j(y)} N(x,dy) = \int_X \underbrace{[\int_X w(z)M(y,dz)]}_{g(y)} N(x,dy).$$

Hier is de MCT tweemaal toegepast: eerst op de binnenintegraal om $g_j(y) \uparrow g(y)$ te krijgen voor elke vaste $y \in X$, en dan nogmaals om $\int_X g_j \uparrow \int_X g$ te krijgen. Wegens stap 2 is het linkerlid in bovenstaande identiteit ook gelijk aan $\lim_j \uparrow \int_X w_j(z)R(x,dz)$, d.w.z. aan $\int_X w(z)R(x,dz)$ vanwege nogmaals een toepassing van de MCT.