Uitwerking Eindtentamen M & I, 28-6-12

E.J. Balder

Opgave 1 [15 pt.] Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte en zij λ de Lebesgue maat op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zij $u : X \to \mathbb{R}$ een meetbare functie.

a. [5 pt.] Bewijs dat de verzameling $G := \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : y = u(x)\}$ (dat wil zeggen: de *grafiek* van u) een $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-meetbare deelverzameling is van $X \times \mathbb{R}$.

b. [10 pt.] Bewijs $(\mu \times \lambda)(G) = 0$.

Oplossing. a. $(x,y) \mapsto u(x)$ en $(x,y) \mapsto y$ zijn evident meetbaar, dus $g : (x,y) \mapsto u(x) - y$ is het ook. Gevolg: $G = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : g(x,y) = 0\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

b. Er geldt $\forall_{x \in X} 1_G(x,y) = 1_{\{u(x)\}}(y)$; dus de stelling van Tonelli-Fubini geeft

$$(\mu\times\lambda)(G) = \int_{X\times\mathbb{R}} 1_G d(\mu\times\lambda) = \int_X [\int_{\mathbb{R}} 1_G(x,y)\lambda(dy)]\mu(dx) = \int_X \underbrace{\lambda(\{u(x)\})}_{0}\mu(dx) = 0.$$

Opgave 2 [15 pt.] a. [7,5 pt.] Zij $f_n(x) := (1+x^2)^{-1} n^2 x e^{-n^2x^2}$. Bepaal $L_a := \lim_{n\to\infty} \int_{[a,\infty)} f_n(x)\lambda(dx)$ voor $a = 0$. Hier staat λ voor de Lebesgue maat op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Aanwijzing:* Maak "maattheoretisch-netjes" gebruik van de substitutie $y := nx$.

b. [7,5 pt.] Bepaal bovenstaande limietwaarde L_a ook voor $a > 0$.

Oplossing. Wegens $f_n \geq 0$ volgt met $g_n(y) := \frac{n^2 y}{n^2+y^2} e^{-y^2} \geq 0$

$$L_a \overset{MCT}{=} \lim_n \lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]} f_n = \lim_n \lim_{b\to\infty} (R)\int_a^b f_n(x)dx \overset{y:=nx}{=} \lim_n \lim_b \int_{[na,nb]} g_n(y)\lambda(dy)$$

Nog eens MCT toepassen geeft dus $L_a = \lim_n \int_{[na,\infty)} g_n d\lambda$ en er geldt $0 \leq g_n(y) \uparrow h(y) := ye^{-y^2} \in \mathcal{L}^1([0,\infty))$.

a. Voor $a = 0$ volgt uit bovenstaande $L_0 = \int_{[0,\infty)} h d\lambda$ met de MCT. Dus

$$L_0 = \lim_N (R)\int_0^N h(y)dy = \lim_N [-\frac{1}{2}e^{-y^2}]_{y=0}^{y=N} = \frac{1}{2}.$$

b. Nu $[na,\infty) \downarrow \emptyset$. Dus volgt $L_a = 0$ met LDCT of MCT, dankzij $h \in \mathcal{L}^1([0,\infty))$.

Opgave 3 [30 pt.] Een *atoom* van een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ is een verzameling $A \in \mathcal{A}$ met de volgende eigenschap: als $B \subset A$ en $B \in \mathcal{A}$ dan of $B = \emptyset$ of $B = A$.

a. [5 pt.] Bewijs: als A een niet-leeg atoom is van $(X, \mathcal{A})$ en als $f : X \to \mathbb{R}$ een $\mathcal{A}$-meetbare functie is, dan bestaat er een $\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat $f(x) = \alpha$ voor alle $x \in A$.

Een *maat-atoom* van een maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ is een verzameling $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$, met de volgende eigenschap: als $B \subset A$ en $B \in \mathcal{A}$ dan of $\mu(B) = 0$ of $\mu(B) = \mu(A)$.

b. [15 pt.] Bewijs: als A een maat-atoom is van $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en als $f : X \to \mathbb{R}$ een $\mathcal{A}$-meetbare functie is, dan bestaat er een $\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat $f(x) = \alpha$ voor μ-bijna alle $x \in A$. *Aanwijzing:* Uiteraard geldt voor elke $\gamma \in \mathbb{R}$ en voor $A_\gamma := A \cap \{f \leq \gamma\}$ dat of $\mu(A_\gamma) = 0$ of $\mu(A_\gamma) = \mu(A)$. Zij C de verzameling van alle $\gamma \in \mathbb{R}$ met $\mu(A_\gamma) = 0$. Kies voor α dan het supremum van C; laat achtereenvolgens zien dat: (i) α welgedefinieerd is, (ii) α ook het maximum is van C (d.w.z. tot C behoort) door de definitie van supremum te gebruiken en (iii) α de gewenste eigenschap heeft.

c. [10 pt.] Beschouw $[0,1]$ de collectie $\mathcal{C}$, bestaande uit alle $C \subset [0,1]$ waarvoor hetzij C hetzij $[0,1]\backslash C$ (hoogstens) aftelbaar is. Definieer $\nu(C) := 0$ als C aftelbaar is en $\nu(C) := 1$ als $[0,1]\backslash C$ aftelbaar is. Laat zien dat $([0,1], \mathcal{C}, \nu)$ een maatruimte is en bepaal daarvan alle atomen en alle maat-atomen.

Oplossing. a. f heeft minstens één waarde op $A \neq \emptyset$. Stel nu dat f minstens twee waarden had op A. Dan $\exists_{x_0, y_0 \in A} f(x_0) < f(y_0) =: \beta$. Voor $B := \{f < \beta\} \cap A$ geldt dan $x_0 \in B \not\emptyset$. Dus zou moeten gelden $B = A$. Maar $y_0 \in A \backslash B$. Tegenspraak. Conclusie: f heeft maar één waarde op A.

b. *Opmerking:* In de definitie van maat-atoom had moeten staan $0 < \mu(A) < \infty$ (beschouw anders bv. op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de maat μ met $\mu(B) = \infty$ voor alle $B \in \mathcal{A}$, $B \neq \emptyset$). Ingeleverde tegenvoorbeelden tegen dit manco hebben daarom de volle puntenscore gekregen.

(i) C is naar boven begrensd, want anders had je $n \in C$ voor $n \in \mathbb{N}$ groot; wegens $A_n \uparrow A$ zou dat geven $\mu(A_n) > 0$ voor n groot en dus tegenspraak, C is ook niet leeg: uit $A_{-n} \downarrow \emptyset$ voor $n \to \infty$ en $\mu(A) < \infty$ volgt $\mu(A_{-n}) < \mu(A)$ en dus $\mu(A_{-n}) = 0$ voor n groot genoeg. Conclusie: α is welgedefinieerd. (ii)-(iii) Voor alle $j \in \mathbb{N}$, groot genoeg, volgt dat (1) $\alpha + \frac{1}{j} \notin C$ en (2) $\alpha - \frac{1}{j} \in C$, en dus $\mu(\{x \in A : \alpha - \frac{1}{j} < f(x) \leq \alpha + \frac{1}{j}\}) = \mu(A)$. Wegens $\{f = \alpha\} \cap A = \cap_j(\{\alpha - \frac{1}{j} < f(x) \leq \alpha + \frac{1}{j}\} \cap A)$ volgt dus $\mu(\{f = \alpha\} \cap A) = \lim_j \downarrow \mu(A) = \mu(A)$, m.a.w. op A is f bijna overal gelijk aan α.

c. Het bewijs dat $\mathcal{C}$ een σ-algebra is, is standaard en lijkt erg op een voorbeeld uit het boek: $\emptyset \in \mathcal{C}$ is triviaal, evenals de geslotenheid van $\mathcal{C}$. Als $(A_j) \subset \mathcal{C}$ onderscheid je twee gevallen: (1) elke A_j is (hoogstens) aftelbaar en (2) voor minstens 1 A_j is het complement aftelbaar. In geval (1) is de vereniging $\cup_j A_j$ weer aftelbaar en deze behoort dus tot $\mathcal{C}$ en in geval (2) is het complement van $\cup_j A_j$ bevat in een aftelbare verzameling, en is dus zelf ook aftelbaar. Om σ-additiviteit aan te tonen, beschouw je een vereniging $A := \cup_j A_j$ van disjuncte verzamelingen A_j. Als alle A_j aftelbaar zijn, dan geldt $0 = \nu(A) = \sum_j \nu(A_j)$ wegens de aftelbaarheid van A. Zoniet, dan kan er slechts precies een A_j een aftelbaar complement hebben (dit vanwege de disjunctheid); omdat dan ook A een aftelbaar complement heeft, geldt dus $1 = \nu(A) = \sum_j \nu(A_j)$.

Tenslotte bepaal je achtereenvolgens de atomen en maat-atomen. Elk singleton is duidelijk een atoom. Stel er was een atoom A dat geen singleton was; dan had dit atoom minstens twee verschillende elementen x_1 en x_2. Dat geeft tegenspraak, want $\{x_1\} \in \mathcal{C}$ is dan duidelijk niet-leeg en een echte deelverzameling van A. Wat betreft de maat-atomen: een aftelbare A kan geen maat-atoom zijn, omdat $\nu(A) = 0$ dat onmogelijk maakt. En als A een aftelbaar complement heeft, dan geldt $\nu(A) = 1$; inderdaad geldt dan of $\nu(B) = 0$ of $\nu(B) = \nu(A) = 1$ voor elke $B \subset A$, $B \in \mathcal{C}$. Conclusie: een verzameling is maat-atoom dan en slechts dan als het complement ervan aftelbaar is.

Opgave 4 [20 pt.] Laat f een Lebesgue integreerbare functie zijn op $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ met $\int_{(0,c)} f d\lambda = 0$ voor alle $c > 0$. Hier is λ de Lebesgue maat.

i. Bewijs dat $\int_{(a,b]} f\, d\lambda = 0$ voor alle a, $b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$.

ii. Bewijs dat $\int_I f^+ d\lambda = \int_I f^- d\lambda$ voor elke eindige disjuncte vereniging I van rechts halfgesloten en links halfopen intervallen in $\mathbb{R}_+$.

iii. Bewijs dat $\int_A f^+\, d\lambda = \int_A f^-\, d\lambda$ voor elke $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

iv. Bewijs dat $f = 0$ b.o.

Oplossing. i. Er geldt dan $\int_{(a,b]} f\, d\lambda = \int_{(0,b]} f\, d\lambda - \int_{(0,a]} f\, d\lambda = 0 - 0 = 0$ wegens de σ-additiviteit van $A \mapsto \int_A f\, d\mu$ (en hier speelt de integreerbaarbaarheid van f ook een rol).

ii. Uit het vorige onderdeel volgt dat $\int_{(a,b]} f^+\, d\lambda = \int_{(a,b]} f^-\, d\lambda$ voor alle a, $b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$. Dan volgt het gevraagde eenvoudig uit de σ-additiviteit van $A \mapsto \int_A f^+\, d\mu$ en $A \mapsto \int_A f^-\, d\mu$ wegens $\sum_i \int_{(a_i,b_i]} f^+\, d\lambda = \sum_i \int_{(a_i,b_i]} f^-\, d\lambda$ voor $I := \cup(a_i, b_i]$.

iii. Je gebruikt nu

Opgave 5 [20 pt.] Je moet op twee manieren bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,n)} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx) = \frac{\pi}{2}$; die twee manieren worden hieronder beschreven. Uiteraard is λ hier de Lebesgue maat.

a. [10 pt.] Maak gebruik van de stelling van Fubini en het feit dat $\int_{(0,\infty)} e^{-tx} \lambda(dt) = \frac{1}{x}$ voor elke $x > 0$.

b. [10 pt.] Maak gebruik van het differentieerbaarheidslemma voor $F(t) := \int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx)$ en het feit dat $\int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx = (t^2 + 1)^{-1}$ (als je dit laatstgenoemde feit kunt afleiden krijg je 5 **extra punten**).