F. Ziltener

blok 1, 2017/ 2018
8 november 2017

Maat en integratie

Tentamen

achternaam: ______________________ voornaam: ______________________

studentnummer: ____

Alsjeblieft:

- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- Schrijf je naam op elk vel.
- Lever dit voorblad ook in.
- Lever maar één oplossing voor elk probleem in.

Het tentamen duurt 180 minuten.

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel papier (A4-formaat, voor- en achterkant) met eigen aantekeningen te gebruiken. Deze moeten handgeschreven zijn.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat ((hulp-)stelling, propositie of gevolg) gebruiken dat in het hoorcollege of in het boek van Cohn is bewezen, zonder het opnieuw te bewijzen.

Als een tentamenopgave (deel van) een resultaat X in het hoorcollege of in het boek was dan wordt verwacht dat je de uitspraak herbewijst. Tenzij anders aangegeven, mag je elk resultaat gebruiken dat in het bewijs van X werd gebruikt, zonder het te bewijzen.

Als een afbeelding meetbaar is dan mag je dit zonder bewijs gebruiken, tenzij anders aangegeven.

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

28 punten zijn voldoende voor een cijfer 6.

Succes!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
/4	/8	/6	/7	/4	/6	/5	/10	/8	/58

Opgave 1 (voorbeeld van maat, 4 pt)**.** Zij X een niet-lege verzameling en $w\colon X \to [0,\infty)$ een functie. We definiëren

$$\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty], \quad \mu(A) := \sum_{x\in A} w(x).$$

($\mathcal{P}(X)$ is de machtsverzameling van X.)

(i) Toon aan dat μ en maat is.

(ii) Is μ altijd σ-eindig?

Opgave 2 (voortgebrachte σ-algebra, 8 pt)**.** Zij X een verzameling en $\mathcal{C}$ de collectie van alle singletons, d.w.z.

$$\mathcal{C} := \big\{\{x\} \,\big|\, x \in X\big\}.$$

We definiëren

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap_{\mathcal{B}\,\sigma\text{-algebra: } \mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}} \mathcal{B},$$

$$\mathcal{A} := \big\{A \subseteq X \,\big|\, A \text{ of } A^C \text{ is aftelbaar}\big\}.$$

Toon aan dat

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}.$$

Opgave 3 (maat van lim inf van verzamelingen, 6 pt)**.** Zij X een verzameling en $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ een rij van deelverzamelingen van X. We definiëren

$$\liminf_{i\to\infty} A_i := \big\{x \in X \,\big|\, \text{voor slechts eindig veel } i \text{ geldt } x \notin A_i\big\}.$$

Zij $\mathcal{A}$ een σ-algebra op X en μ een maat op $\mathcal{A}$. Stel dat $A_i \in \mathcal{A}$ voor alle i. Toon aan dat

$$\mu\left(\liminf_{i\to\infty} A_i\right) \le \liminf_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Opgave 4 (vervollediging van een maatruimte, 7 pt)**.** Zij $(X,\mathcal{A},\mu)$ een maatruimte. We definiëren

$$\overline{\mathcal{A}} := \big\{A \cup S \,\big|\, A \in \mathcal{A},\, S \text{ deelverzameling van een } \mu\text{-nulverzameling}\big\},$$

$$\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{A}} \to [0,\infty], \quad \overline{\mu}(\overline{A}) := \mu(A),$$

waarbij $A \in \mathcal{A}$ en S een deelverzameling van een μ-nulverzameling is zó, dat

$$\overline{A} = A \cup S.$$

Bewijs het volgende:

(i) $\overline{\mu}$ is een maat.

(ii) $\overline{\mu}$ is volledig.

Opmerking: Je mag zonder bewijs gebruiken dat $\overline{\mathcal{A}}$ een σ-algebra is en dat $\overline{\mu}(\overline{A})$ goed gedefinieerd is.

Opgave 5 (limiet van integralen, 4 pt)**.** Zij $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ een Lebesgue-integreerbare functie met $\int f(x)\,dx = 1$. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$a_n := \int n \sin\left(\frac{f(x)}{n}\right) dx. \tag{1}$$

Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert en bereken de limiet.

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat de integraal (1) bestaat.

(Z.o.z. voor meer opgaven.)

Opgave 6 (ongelijkheid voor $|\cdot|_p$, 6 pt). Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_n, r \in (1, \infty)$ zó, dat

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$$

en $f_i \in \mathcal{L}^{p_i}\big(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}\big)$ voor $i = 1, \ldots, n$. Toon aan dat $\prod_{i=1}^n f_i \in \mathcal{L}^r\big(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}\big)$ en dat

$$\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\right|_r \leq \prod_{i=1}^{n} |f_i|_{p_i}.$$

(Hierbij is $|f|_p := \sqrt[p]{\int |f|^p d\mu}$.)

Opgave 7 (productmaat van gebied onder grafiek, 5 pt). Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte, $f\colon X \to [0, \infty)$ en

$$S := \big\{(x, y) \in X \times [0, \infty) \,\big|\, y \leq f(x)\big\}.$$

Stel dat $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{\lambda_1^*}$. ($\mathcal{A}_{\lambda_1^*} := \big\{$Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}\big\}$) Toon het volgende aan:

(i) f is $\mathcal{A}$-meetbaar. De functie $\mathbb{R} \ni y \mapsto \mu\left(f^{-1}\big([y, \infty)\big)\right) \in \mathbb{R}$ is $\mathcal{A}_{\lambda_1^*}$-meetbaar.

(ii)
$$\int f \, d\mu = \int \mu\left(f^{-1}\big([y, \infty)\big)\right) \, d\lambda_1(y).$$

Opgave 8 (equivalente maten, 10 pt). Zij μ en ν σ-eindige maten op een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ zó, dat μ en ν dezelfde nulverzamelingen hebben. Toon aan dat er een $\mathcal{A}$-meetbare functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ bestaat, zó, dat

$$f > 0,$$
$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \mu(A) = \int_A \frac{1}{f} \, d\nu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Opmerking: Je mag gebruiken dat voor elke maat κ op $\mathcal{A}$ en elke $\mathcal{A}$-meetbare functie $g\colon X \to [0, \infty]$ de afbeelding $\mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A g \, d\kappa \in [0, \infty]$ een maat is.

Opgave 9 (maximum van twee maten, 8 pt). Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte en μ en ν eindige maten op $\mathcal{A}$. Toon aan dat er een unieke maat κ op $\mathcal{A}$ bestaat die aan de volgende voorwaarden voldoet:

(a) $\kappa \geq \mu$, $\kappa \geq \nu$.

(b) Als λ een maat op $\mathcal{A}$ is waarvoor $\mu \leq \lambda$ en $\nu \leq \lambda$ dan geldt dat $\kappa \leq \lambda$.

Opmerking: Dit betekent dat ieder tweetal eindige maten een unieke maximum heeft.