F. Ziltener

blok 1, 2017/ 2018
5 januari 2018

Maat en integratie

Hertentamen

achternaam: ________________ voornaam: ________________

studentnummer: ________________________________

Alsjeblieft:

- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- Schrijf je naam op elk vel.
- Lever dit voorblad ook in.
- Lever maar één oplossing voor elk probleem in.

Het tentamen duurt 180 minuten.

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel papier (A4-formaat, voor- en achterkant) met eigen aantekeningen te gebruiken. Deze moeten handgeschreven zijn.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat ((hulp-)stelling, propositie of gevolg) gebruiken dat in het hoorcollege of in het boek van Cohn is bewezen, zonder het opnieuw te bewijzen.

Als een tentamenopgave (deel van) een resultaat X in het hoorcollege of in het boek was dan wordt verwacht dat je de uitspraak herbewijst. Tenzij anders aangegeven, mag je elk resultaat gebruiken dat in het bewijs van X werd gebruikt, zonder het te bewijzen.

Als een afbeelding meetbaar is dan mag je dit zonder bewijs gebruiken, tenzij anders aangegeven.

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

25 punten zijn voldoende voor een cijfer 6.

Succes!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
/3	/4	/6	/5	/5	/11	/10	/12	/8	/64

Opgave 1 (σ-algebra, doorsnede, 3 pt)**.** Zij $\mathcal{A}$ een σ-algebra op een verzameling X. Toon aan dat de doorsnede van elke aftelbare collectie van elementen van $\mathcal{A}$ weer in $\mathcal{A}$ ligt.

Opgave 2 (uitwendige Lebesguemaat van Cantorverzameling, 4 pt)**.** We definiëren $K_0 := [0,1]$ en recursief voor $i \in \mathbb{N}_0$

$$K_{i+1} := \left(\frac{1}{3}K_i\right) \cup \left(\frac{1}{3}K_i + \frac{2}{3}\right),$$

waarbij $aS + b := \left\{ax + b \,\middle|\, x \in S\right\}$. We definiëren de Cantorverzameling als

$$K := \bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} K_i.$$

Bereken de Lebesguemaat van K.

Opgave 3 (benadering van Lebesgue-meetbare verzameling door Borelverzamelingen, 6 pt)**.** Zij $A \subseteq \mathbb{R}^d$ een Lebesgue-meetbare verzameling met eindige maat. Toon aan dat er Borelverzamelingen E, F bestaan zó, dat

$$E \subseteq A \subseteq F, \quad \lambda(F \setminus E) = 0.$$

Opmerking: Dit was een gevolg in het hoorcollege dat gebaseerd was op een propositie. Je wordt gevraagd om het gevolg opnieuw te bewijzen, maar je hoeft de propositie niet opnieuw te bewijzen.

Opgave 4 (limiet van integraal, 5 pt)**.** Zij $a \in \mathbb{R}$. Bereken de limiet van Lebesgue-integralen

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n}{1+nx^2} dx \tag{1}$$

en rechtvaardig je berekening.

Opmerkingen: Je hoeft niet te bewijzen dat de integralen in (1) bestaan.

Je mag gebruiken dat voor een *eigenlijk* Riemann-integreerbare functie (gedefinieerd op een begrensd interval) de Riemann- en de Lebesgue-integralen overeenkomen.

Opgave 5 (integral afschatten, 5 pt)**.** Bewijs dat

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} \left(e^{-\frac{x^5}{10}} x^2\right) dx \leq 1.$$

Hint: Gebruik een ongelijkheid uit het hoorcollege.

Opgave 6 (volledigheid van de ruimte van essentieel begrensde functies, 11 pt)**.** Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Toon aan dat $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ volledig is.

Tip: Zij (f_n) een Cauchyrij in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Bewijs de volgende uitspraken:

- Er bestaat een μ-nulverzameling S zó, dat voor alle $x \in S^C = X \setminus S$ de rij $(f_n(x))$ convergeert, als $n \to \infty$.
- (f_n) convergeert m.b.t. $|\cdot|_\infty$.

(Z.o.z. voor meer opgaven.)

Opgave 7 (integratievolgorde niet altijd verwisselbaar, 10 pt). (i) Zij $I = (0,1)$. Vind een functie $f : I \times I \to \mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen:

- Voor alle $x, y \in I$ zijn de snedes
$$f_x : I \to \mathbb{R},\ f_x(y) := f(x,y), \quad f^y : I \to \mathbb{R},\ f^y(x) := f(x,y),$$
integreerbaar m.b.t. de Lebesguemaat.
- De functies $I \ni y \mapsto \int f(x,y)\,dx \in \mathbb{R}$ en $I \ni x \mapsto \int f(x,y)\,dy \in \mathbb{R}$ zijn Lebesgue-integreerbaar en
$$\int \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy \neq \int \left(\int f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Hint: Splits het vierkant $(0,1) \times (0,1)$ in twee delen op en definieer f op elk deel apart.

(ii) Waarom is deel (i) niet in tegenspraak met de Stelling van Fubini?

Opgave 8 (σ-voortbrenging commuteert met product, voorbeeld van product-σ-algebra, 12 pt). Zij X een verzameling. We duiden met $\mathcal{P}(X)$ de machtsverzameling van X aan. Voor elke deelcollectie $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiëren we
$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap_{\mathcal{B}\,\sigma\text{-algebra: } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}} \mathcal{B}.$$

(i) Voor $i = 1,2$ zij X_i verzamelingen en $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ zó, dat $X_i \in \mathcal{C}_i$. Toon aan dat
$$\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma\left(\left\{ A_1 \times A_2 \,\middle|\, A_i \in \mathcal{C}_i,\ \forall i = 1,2 \right\} \right),$$
waarbij $\otimes$ het product van σ-algebra's aanduidt.

(ii) Zij X een verzameling en
$$\mathcal{A} := \left\{ A \in \mathcal{P}(X) \,\middle|\, A \text{ of } A^C \text{aftelbaar} \right\}$$
Bereken $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Opmerkingen: Je mag zonder bewijs gebruiken dat $\mathcal{A}$ een σ-algebra is en dat de push-forward van een σ-algebra een σ-algebra is.

Opgave 9 (dichtheidsfunctie, 8 pt). Een functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet *absoluut continu* d.e.s.d.a. er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ met de volgende eigenschap bestaat. Zij $n \in \mathbb{N}_0$ en $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$, getallen zó, dat de intervallen (a_i, b_i), $i = 1, \dots, n$, disjunct zijn en
$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta,$$
dan geldt dat
$$\sum_{i=1}^{n} \left| F(b_i) - F(a_i) \right| < \varepsilon.$$
Zij $\mathcal{A}$ de σ-algebra van Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ en $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ een eindige maat. We definiëren $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ door $F(x) := \nu((-\infty, x])$. Stel dat F absoluut continu is. Toon aan dat er een Lebesgue-meetbare functie $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bestaat zó, dat
$$\nu(A) = \int_A f\,d\lambda, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$
Hint: Wat betekent absolute continuïteit van F in termen van ν? Een propositie uit het hoorcollege zegt daar iets over.

Opmerking: Je wordt gevraagd om deze propositie te bewijzen als je haar gebruikt.