F. Ziltener

blok 1, 2018/ 2019
7 november 2018

Maat en integratie

Tentamen

achternaam: __________________ voornaam: __________________

studentnummer: ____________________________________

Alsjeblieft:

- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- Schrijf je naam op elk vel.
- Lever dit voorblad ook in.
- Lever maar één oplossing voor elk probleem in.

Het tentamen duurt 180 minuten.

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel papier (A4-formaat, voor- en achterkant) met eigen aantekeningen te gebruiken. Deze moeten handgeschreven zijn.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat ((hulp-)stelling, propositie of gevolg) gebruiken dat in het hoorcollege of in het boek van Cohn is bewezen, zonder het opnieuw te bewijzen.

Tenzij anders aangegeven, mag je het volgende zonder bewijs gebruiken:
Elke eigenlijk Riemann-integreerbare functie is Lebesgue-integreerbaar en de twee integralen komen overeen. (Zo'n functie is gedefinieerd op een begrensd interval.)

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

25 punten zijn voldoende voor een cijfer 6.

Succes!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
/3	/3	/4	/6	/4	/6	/3	/4	/8	/7	/48

Opgave 1 (som van maten van vereniging en doorsnede, 3 pt)**.** Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en $A, B \in \mathcal{A}$. Toon aan dat

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Opmerking: Je hoeft niet aan te tonen dat $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Opgave 2 (doorsnede van familie van σ-gesloten collecties, 3 pt)**.** Zij X een verzameling. We duiden met $\mathcal{P}(X)$ haar machtsverzameling aan. We noemen een collectie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-gesloten als de vereniging van elke aftelbare deelcollectie van $\mathcal{A}$ weer in $\mathcal{A}$ ligt. Zij $\mathbf{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, d.w.z. een familie van collecties van deelverzamelingen van X. Stel dat elke collectie $\mathcal{A} \in \mathbf{F}$ σ-gesloten is. Toon aan dat de doorsnede

$$\bigcap \mathbf{F} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbf{F}} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

σ-gesloten is.

Opgave 3 (pushforward-maat, 4 pt)**.** Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, $(Y, \mathcal{B})$ een meetbare ruimte en $f : X \to Y$ een $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-meetbare functie. We definiëren

$$f_*\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty], \quad (f_*\mu)(B) := \mu\big(f^{-1}(B)\big).$$

Toon aan dat $f_*\mu$ een maat op $\mathcal{B}$ is.

Opgave 4 (karakterisering van Lebesgue-meetbaarheid, 6 pt)**.** Zij $d \in \mathbb{N}_0$. We duiden met λ_d^* de d-dimensionale uitwendige Lebesgue-maat aan. Toon aan dat een deelverzameling $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgue-meetbaar is als

$$|R| \geq \lambda_d^*(R \cap A) + \lambda_d^*(R \setminus A),$$

voor elk begrensd open blok $R \subseteq \mathbb{R}^d$, waarbij $|R|$ het volume van R aanduidt (=product van de zijlengten).

Opmerking: Je mag zonder bewijs gebruiken dat we in de definitie van λ_d^* alleen *begrensde open* blokken mogen gebruiken.

Opgave 5 (limiet van integraal, 4 pt)**.** Bewijs dat de rij

$$\left(\int_0^\infty e^{-e^{nx}} \, dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

convergeert en bereken de limiet. Rechtvaardig je berekening.

Opgave 6 (differentiëren onder het integraalteken, 6 pt)**.** Zij I een open interval, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en $f : I \times X \to \mathbb{R}$ een functie met de volgende eigenschappen.

(a) Voor elke $t \in I$ is de functie $f(t, \cdot)$ μ-integreerbaar, waarbij $f(t, \cdot)(x) := f(t, x)$.

(b) Voor elke $x \in X$ is de functie $f(\cdot, x)$ differentieerbaar.

(c) Er bestaat een μ-integreerbare functie $g : X \to \mathbb{R}$ zó, dat

$$\big|\partial_t f(t, x)\big| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in I \times X. \tag{1}$$

(Z.o.z.)

Toon aan dat de functie $\partial_t f(t,\cdot)$ integreerbaar is voor alle $t \in I$. Bewijs ook dat de functie

$$I \ni t \mapsto \int f(t,x)\, d\mu(x)$$

differentieerbaar is met afgeleide

$$\frac{d}{dt}\int f(t,x)\, d\mu(x) = \int \partial_t f(t,x)\, d\mu(x). \tag{2}$$

Opgave 7 (relaties tussen de ruimten van p-integreerbare functies, 3 pt)**.** Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een eindige maatruimte (d.w.z. $\mu(X) < \infty$) en $p < q \in [1, \infty)$. Toon aan dat

$$\mathcal{L}^q(\mu, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu, \mathbb{R}).$$

Opmerking: Hierbij duidt $\mathcal{L}^p(\mu, \mathbb{R})$ de verzameling van alle p-integreerbare functies van X naar $\mathbb{R}$ aan (m.b.t. μ).
Tip: Gebruik een ongelijkheid uit het hoorcollege.

Opgave 8 (afschatting voor integraal, 4 pt)**.** Toon aan dat

$$\int_0^\infty \left(e^{-\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x^5}{20}}x\right)^4 dx \le 16.$$

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat de integrand meetbaar is.
Tip: Gebruik een ongelijkheid uit het hoorcollege.

Opgave 9 (herhaalde integraal, 8 pt)**.** We duiden met λ_d de d-dimensionale Lebesguemaat en met $\mathcal{B}^d$ de standaard Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}^d$ aan.

(i) Toon aan dat de functie

$$f : [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \sin\left(e^x y(\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \circ \cos)(y)\right)$$

$(\lambda_2|\mathcal{B}^2)$-integreerbaar is. (Dit betekent in het bijzonder dat f $(\mathcal{B}^2, \mathcal{B}^1)$-meetbaar is.)

(ii) Toon aan dat voor elke $y \in [-1,1]$ de functie $f(\cdot, y)$ $(\lambda_1|\mathcal{B}^1)$-integreerbaar is.

(iii) Toon aan dat de functie $[-1,1] \mapsto \int f(x,y)\, dx \in \mathbb{R}$ $(\lambda_1|\mathcal{B}^1)$-integreerbaar is.

(iv) Bereken de herhaalde Lebesgue-integraal

$$\int \left(\int f(x,y)\, dx\right) dy$$

en rechtvaardig je berekening.

Opgave 10 (associativiteit van het σ-algebra-product, 7 pt)**.** Voor $i = 0, 1, 2$ zij $(X_i, \mathcal{A}_i)$ een meetbare ruimte. Toon aan dat

$$(\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_1) \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_0 \otimes (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2),$$

waarbij we de Cartesische producten $(X_0 \times X_1) \times X_2$ en $X_0 \times (X_1 \times X_2)$ op een canonieke manier identificeren.

Opmerking: In deze opgave mag je iedere opgave van het werkcollege zonder bewijs gebruiken.