Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In electronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Es^2.
Het college MAAT werd in 2000/2001 gegeven door Prof. Dr. Richard Gill.

Maat en Integratie (MAAT)
1 juli 2001

a. **(a)** Laat zien dat voor $p > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^{px}(1-e^{-x})}dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+p)^2}$$

[*Hint: ontwikkel* $(1-e^{-x})^{-1}$ *als meetkundige reeks* en pas de monotoon convergentie stelling toe].

(b) Laat zien dat voor elke positieve gehele getal r,

$$\lim_{n\uparrow\infty}\int_0^n x^r\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = r!$$

[*Hint: Merk op dat* $(1-t) \leq e^{-t}$ *en construeer hiermee een functie die alle integranden uniform in* n *majoreert.*].

(c) Beschouw de functies

$$f_n(x) = \frac{1}{n}I(x \in (-n,n)).$$

voor $n \geq 1$. Leg kort uit waarom $f_n \in L^1(\lambda, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ voor alle n waar λ Lebesgue maat is.
Gebruik deze functie om te laten zien dat als $\{g_n : n \geq 1\}$ een reeks niet-negatieve functies in $L^1(\lambda, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ is, dan is het niet noodzakelijk waar dat

$$g_n \to g \text{ in } \lambda\text{-measure } \Rightarrow g_n \to g \text{ in } L^1 \text{ norm.}$$

(d) Beschouw de functie $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$ op $[0,1]\times[0,1]$. Laat zien dat zijn herhaalde integralen (eerst over x en dan over y; en eerst over y en dan over x) over $[0,1]\times[0,1]$ verschillend zijn. Leg uit met behulp van de stelling van Fubini, waarom.

b. **(a)** Beschouw de coordinaat afbeeldingen $\rho_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ for $i = 1, ..., n$

$$\rho_i(z_1, ..., z_n) = z_i \text{ voor alle } (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Laat zien dat ρ_i is meetbaar ten opzichte van $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ voor alle $i = 1, ..., n$.

(b) Laat zien dat

$$\sigma\left(E_1 \times ... \times E_n : E_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 1 \leq i \leq n\right) = \sigma\left(\rho_i : 1 \leq i \leq n\right)$$

(c) Leidt hieruit af dat $[\mathcal{B}(\mathbb{R})]^n \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(d) Nu laat zien dat $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq [\mathcal{B}(\mathbb{R})]^n$. [*Hint: herinner je dat* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma($*open verz. in* $\mathbb{R}^n)$].

(e) Laat zien met behulp van een tegenvoorbeeld dat $\bar{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}} \times \bar{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}} \neq \bar{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^2}$.

c. Stel dat $(E, \mathcal{F}, \mu)$ is een σ-eindige maatruimte en stel $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ is een andere σ-algebra op E. Stel dat $0 \leq f \in L^1(E, \mathcal{F}, \mu)$.

(a) Laat zien dat voor alle $A \in \mathcal{G}$
$$\nu(A) := \int f I_A d\mu$$
is een maat op $(E, \mathcal{G})$ zodanig dat $\nu \ll \mu$

(b) Bewijs, met behulp van de Radon-Nikodym stelling dat er een $0 \leq g \in L^1((E, \mathcal{G}, \mu)$ bestaat zodanig dat
$$\int f I_A d\mu = \int g I_A d\mu \text{ for all } A \in \mathcal{G}.$$

(c) Laat zien dat als $0 \leq \bar{g} \in L^1((E, \mathcal{G}, \mu)$ is nog een functie die aan de gelijkheid in (b) voldoet, dat $\bar{g} = g$ bijna overal. [*Hint: Bewijs uit het ongerijmde. Stel dat* $\int(\bar{g} - g) I_A d\mu = 0$ *voor alle* $A \in \mathcal{G}$*. Beschouw de laatste integraal over de verzameling* $A = \{\bar{g} - g > n^{-1}\}$ *voor voldoende grote* n *and pas de Markov ongelijkheid toe*].

(d) Stel dat $\mathcal{C}$ is een π-systeem die $\mathcal{G}$ voortbrengt. Stel bovendien dat we een kandidaat functie h hebben die aan de gelijkheid (b) voldoet voor alle $A \in \mathcal{C}$. Laat zien dat
$$\left\{ A \in \mathcal{G} : \int h I_A d\mu = \int f I_A d\mu \right\}$$
is een λ-systeem die $\mathcal{C}$ bevat. Concludeer hieruit dat h voldoet aan de gelijkheid in (b) voor alle $A \in \mathcal{G}$.

d. Stel dat μ en ν twee σ-eindige maten op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ zijn. Laat
$$B := (a, b] \times (a, b],$$
$$B^+ := \{(x, y) \in B : x < y\},$$
$$B^- := \{(x, y) \in B : x \geq y\}.$$

(a) Gebruik de stelling van Fubini om twee verschillende integralen op te schrijven die gelijk zijn aan $(\mu \times \nu)(B^-)$. [*Je mag de hoofdresultaat van vraag 2 gebruiken*].

(b) Stel μ en ν zijn eindig, en schrijf $F(x) = \mu(-\infty, x]$, $G(x) = \nu(-\infty, x]$ and $F(x^-) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$. Laat zien dat
$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(B) &= \{F(b) - F(a)\}\{G(b) - G(a)\} \\ &= \int_{(a,b]} \{F(u^-) - F(a))\} dG(u) + \int_{(a,b]} \{G(u) - G(a)\} dF(u)\end{aligned}$$

(c) Concludeer dat
$$\{F(b)G(b) - F(a)G(a)\} = \int_{(a,b]} F(u^-) dG(u) + \int_{(a,b]} G(u) dF(u).$$