Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB312 werd in 2001/2002 gegeven door Prof. Dr. Ir. E.J. Balder.

Maat en Integratie B (WISB312)
3 mei 2002

9:00 – 10:30 uur

Let op de bovenvermelde tijd! Bij de opgaven mag je altijd van een vorig onderdeel gebruik maken, ook als je dat niet hebt gemaakt. Vermeld stellingen uit het boek, huiswerkopgaven e.d. waarop je je beroept, altijd duidelijk.

Opgave 1 (45 punten)

Zij $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij integreerbare, niet-negatieve functies op (S, Σ, μ). Stel dat (f_n) in μ-maat convergeert naar f_0 en dat $\lim_n \int_S f_n \, d\mu = \int_S f_0 \, d\mu$.

a) Bewijs dat $\int_S |f_n - f_0| \, d\mu = \int_S (f_n - f_0) \, d\mu + 2 \int_S (f_n - f_0)^- \, d\mu$.

b) Bewijs dat $\limsup_n \int_S |f_n - f_0| \, d\mu = 2 \limsup_n \int_S (f_n - f_0)^- \, d\mu$.

c) Bewijs dat $(f_n - f_0)^- \leq f_0$ voor alle n.

d) Bewijs dat $\lim_n \int_S |f_n - f_0| \, d\mu = 0$.

Opgave 2 (55 punten)

Zij $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ uitgerust met de Lebesgue maat λ. Gegeven zijn twee λ-integreerbare functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) bewijs: de functie $h : (x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ is product-meetbaar op $\mathbb{R}^2$. *aanwijzing:* Het is handig om zoveel mogelijk meetbaarheidseigenschappen van continue operaties te gebruiken.

b) Bewijs vanuit de basiseigenschappen van de Lebesgue-maat: voor elke $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ en elke $a \in \mathbb{R}$ geldt: $\lambda(B + a) = \lambda(B)$.

c) Bewijs: voor λ-bijna elke $x \in \mathbb{R}$ is de functie $y \mapsto f(x - y)g(y)$ λ-integreerbaar. *aanwijzing:* Gebruik hier Tonelli en onderdeel b).

d) Zij N de uitzonderingsverzameling in onderdeel c) (dus $\lambda(N) = 0$). Definieer $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als volgt: $H(x) := h(x)$ als $x \notin N$ en $H(x) := 0$ als $x \in N$. Bewijs (1) H is meetbaar, (2) H is λ-integreerbaar, (3) $||H||_{L^1(\lambda)} \leq ||f||_{L^1(\lambda)} \, ||g||_{L^1(\lambda)}$.