Tweede Deeltentamen Distributies

Woensdag 29 juni 2011

14.00 - 17.00

Geef niet alleen antwoorden, maar geef ook de volledige argumentatie waar het antwoord uit volgt. Veel succes!

Opgave 1 ($2\frac{1}{2}$ punten) Bewijs dat voor $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ geldt

$$d_*(\phi \otimes \psi) = \phi * S\psi$$

Toelichting: We vatten hier $\phi \otimes \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ gedefinieerd door $(\phi \otimes \psi)(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ op als een distributie (zonder dat we er het woordje *test* voor plakken om dat aan te geven); $d_* : \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ is de pushforward van de verschilafbeelding $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ gedefinieerd door $d(x, y) = x - y$; de spiegeling S is gedefinieerd door $(S\psi)(x) = \psi(-x)$; ook het convolutieproduct $\phi * S\psi$ vatten we op als een (compact gedragen) distributie.

Opgave 2 ($2\frac{1}{2}$ punten)

(i, $\frac{1}{2}$pt) Zij $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ en $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Geef de definitie van $u * \phi(x)$ voor $x \in \mathbf{R}^n$.

(ii, $\frac{1}{2}$pt) Zij $K : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ een lineaire afbeelding. Geef de betekenis van de bewering *K wordt gegenereerd door de distributiekern $k \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.*

(iii, $1\frac{1}{2}$pt) Voor een gegeven $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ definieer een lineaire afbeelding $K : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ door

$$K\psi = u * \psi$$

(waarbij het rechterlid dus wordt opgevat als een distributie zonder dat we dit aangeven door er *test* voor te plakken). Bepaal de distributiekern die deze afbeelding genereert. **Hint**: gebruik Opgave 1.

ZOZ

Opgave 3 ($2\frac{1}{2}$ punten)

(i, $\frac{1}{2}$pt) Zij $v \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ en $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Geef de definitie van $u * v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ zoals die in het boek wordt gegeven. (In het vervolg van deze opgave laten we zien dat er een alternatieve definitie mogelijk is.)

(ii, 1pt) Zij $v \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ en $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Definieer

$$(A\phi)(x) = Sv * \phi(x)$$

waarbij het rechterlid gedefinieerd is als in Opgave 2(i). Dan is $A\phi$ een C^∞-functie met compacte drager. Toon aan dat

$$(A\phi)(x) = v(y \mapsto \phi(x+y))$$

(iii, 1pt) De afbeelding $A : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ is lineair en continu. Toon aan dat voor de getransponeerde afbeelding ${}^tA : \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ geldt

$${}^tAu = u * v$$

Opgave 4 ($2\frac{1}{2}$ punten)

(i, 2pt) Beschouw de lineaire partiële differentiaaloperator ∂_1 op $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$. Vind een fundamentele oplossing.

Hint 1: Maak een *educated guess* en verifieer dat dit een goed antwoord oplevert.

Hint 2: Als een directe manier van gokken niet wil lukken, kun je het ook proberen via een indirecte weg; namelijk door

- eerst formeel Fouriertransformatie toe te passen
- jezelf te overtuigen dat, als de Fouriertransform het product is van een functie van ξ_1 en een functie van ξ_2, dat dan de distributie een tensorproduct is
- tot slot je kennis van één-dimensionale problemen te gebruiken

(i, $\frac{1}{2}$pt) Beschouw tot slot de lineaire partiële differentiaaloperator $\partial_1 + \partial_2$ op $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ en vind ook hiervoor een fundamentele oplossing.

EINDE