MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE WIS314 WERD IN 2003 GEGEVEN DOOR JOOP KOLK.

Distributies (huiswerktentamen) (WIS314)
najaar 2003

- De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.
- Beweringen mogen worden bewezen door verwijzing naar Stellingen, Lemmas, etc. en ook Vraagstukken uit de syllabus **Distributies** die voor de werkcolleges zijn opgegeven; men wordt zelfs aangespoord dat zoveel mogelijk op deze wijze te doen.
- De gewichten van de vraagstukken bij de bepaling van het cijfer zijn 30, 35, 35, respectievelijk.
- Dit is het eerste gedeelte van het tentamen. Lever het volledige werk pas in na voltooiing van het tweede gedeelte.
- Eventueel wordt men na inlevering uitgenodigd door de docent voor een mondelinge toelichting van het werk en/of verdere bespreking van de stof. De kans dat dit gebeurt is gering voor studenten die actief hebben deelgenomen aan het vraagstukkenuur.
- Zit men op een essentieel punt vast, aarzel dan niet om contact te zoeken per e-mail met `kolk@math.uu.nl`.

References

[Jackson] J.D. Jackson. – *Classical Electrodynamics*. Second Edition. John Wiley & Sons: New York 1975

[MRA] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk. – Syllabus Analyse in Meer Variabelen: *Multidimensional Real Analysis*

[P–P] W.K.H. Panofsky, M. Phillips. – *Classical Electricity and Magnetism*. Second Edition. Addison–Wesley Publishing Cy: Reading, etc. 1962

Opgave 1. Helmholtzvergelijking

Zij $k \in [0, \infty[$ en definieer

$$E_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \qquad \text{door} \qquad E_\pm(x) = \frac{e^{\pm ik\|x\|}}{\|x\|}.$$

a) Bewijs dat $E_\pm \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

We zullen nu op twee verschillende manieren aantonen dat $-\frac{1}{4\pi}E_\pm$ een fundamentele oplossing is van de *differentiaalvergelijking van Helmholtz* met parameter k, dwz. dat in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ geldt.

$$(\star) \qquad (\Delta + k^2)E_\pm = -4\pi\delta.$$

Het eerste bewijs is een verificatie dat de oplossing inderdaad voldoet aan de vergelijking, het tweede is een constructie van de oplossing.

b) Ga na dat in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ geldt

$$\operatorname{grad} e^{\pm ik\|x\|} = \pm ikE_\pm(x)\,x, \qquad \Delta e^{\pm ik\|x\|} = (\pm 2ik - k^2\|x\|)E_\pm(x).$$

Bewijs dat we in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ bovendien hebben

$$\Delta E_\pm = e^{\pm ik\|x\|}\Delta\Big(\frac{1}{\|x\|}\Big) + 2\Big\langle \operatorname{grad} e^{\pm ik\|x\|}, \operatorname{grad}\Big(\frac{1}{\|x\|}\Big)\Big\rangle + \frac{1}{\|x\|}\Delta e^{\pm ik\|x\|},$$

en gebruik deze resultaten om $(\star)$ te bewijzen.

Nu het tweede bewijs. Zij $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ een radiale functie, dwz., er bestaat $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ met $f(x) = f_0(\|x\|)$.

c) Bereken Δf in termen van afgeleiden van f_0.

d) Veronderstel dat f bovendien voldoet aan $(\Delta + k^2)f = 0$. Bepaal de differentiaalvergelijking waaraan $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ met $g(r) = rf_0(r)$ voldoet, en bewijs hiermee dat geldt, voor a en $b \in \mathbb{C}$,

$$f(x) = a\,\frac{\cos k\|x\|}{\|x\|} + b\,\frac{\sin k\|x\|}{\|x\|} \qquad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

e) Toon middels de Tweede Identiteit van Green aan dat in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ geldt

$$(\Delta + k^2)f = -4\pi a\,\delta.$$

f) Concludeer dat elke rotatie-invariante fundamentele oplossing van de vergelijking van Helmholtz wordt gegeven door

$$\sum_\pm c_\pm E_\pm \qquad \text{met} \qquad c_\pm \in \mathbb{C}, \sum_\pm c_\pm = 1.$$

Opgave 2. Golfvergelijking

We zullen een fundamentele oplossing bepalen voor de *golfoperator* $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$ werkend op $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$, waarbij $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^4$.

a) Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ open. Beschouw een C^∞ functie $\Phi : X \to \mathbb{R}$ met de eigenschap $\mathrm{grad}\Phi(x) \neq 0$, voor elke $x \in X$. Schrijf $N(y) = \{\, x \in X \mid \Phi(x) = y \,\}$, voor elke $y \in \mathbb{R}$; uit ? is dan bekend dat $N(y)$ een gesloten C^∞ deelvariëteit in X van dimensie $n-1$ is. Zij $\phi \in C_0^\infty(X)$. Bewijs m.b.v. Exercise 7.36, voor elke $y \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_*\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \qquad \text{met} \qquad (\Phi_*\phi)(y) = \int_{N(y)} \frac{\phi(x)}{\|\mathrm{grad}\ \Phi(x)\|}\, d_{n-1}x,$$

waarbij Euclidische $(n-1)$-dimensionale integratie over $N(y)$ is gebruikt.

b) Concludeer m.b.v. onderdeel (i), voor $t \in \mathbb{R}$ en $\phi \in C_0^\infty(X)$,

$$\int_{-\infty}^{t} (\Phi_*\phi)(y)\, dy = \int_{\{\, x\in X \mid \Phi(x) < t\,\}} \phi(x)\, dx;$$

en leid hieruit af

$$\Phi^*(\delta_t)(\phi) = \frac{d}{dt}\int_{\{\, x\in X \mid \Phi(x) < t\,\}} \phi(x)\, dx \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Onderstel in het vervolg dat $n = 4$, dat $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $\Phi(x,t) = t^2 - \|x\|^2$, en schrijf bovendien $X = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$.

c) Verifieer dat $\mathrm{grad}\Phi(x,t) \neq 0$, voor alle $(x,t) \in X$.

d) Zij $\phi \in C_0^\infty(X)$ en bewijs m.b.v. onderdeel (ii) dat geldt

$$\begin{aligned}\Phi^*(\delta)(\phi) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\{\, x\in\mathbb{R}^3\,\}} \int_{-\sqrt{\|x\|^2+t}}^{\sqrt{\|x\|^2+t}} \phi(x,x_4)\, dx_4\, dx = \sum\nolimits_\pm \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x,\pm\|x\|)}{\|x\|}\, dx \\ &=: \sum\nolimits_\pm \delta_\pm(\phi).\end{aligned}$$

e) Verifieer dat beide distributies $\delta_\pm \in \mathcal{D}'(X)$ overgaan in de ander onder de reflectie in het hypervlak $\{\, (x,0) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}^3 \,\}$. Ga na dat δ_+ in feite een maat is met de voorwaartse lichtkegel $\Gamma^+ = \{\, (x,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = t \,\}$ als drager, en dat δ_+ kan worden voortgezet tot een element van $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$.

We gaan nu aantonen dat $\Box\, \delta_\pm = 2\pi\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$.

f) Schrijf y voor de variabele in $\mathbb{R}$, en dus i.h.b., $v' = \frac{d}{dy}v$, voor $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Toon aan dat geldt

$$\partial_t \circ \Phi^*(v) = 2t\, \Phi^*(v'); \qquad \partial_{x_j} \circ \Phi^*(v) = -2x_j\, \Phi^*(v') \qquad (1 \le j \le 3).$$

Leid hieruit af dat in $\mathcal{D}'(X)$ geldt

$$\Box\Phi^*(v) = 4\Phi^*\left((2 + y\frac{d}{dy})v'\right).$$

Concludeer m.b.v. de homogeniteit van $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dat $\Box\Phi^*(\delta) = 0$ op X. Omdat de dragers van δ_+ en δ_- disjunct zijn, volgt $\Box\, \delta_\pm = 0$ op X.

g) Bewijs nu dat $k \in \mathbb{N}_0$ en $c_\alpha \in \mathbb{C}$ bestaan z, dat in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ geldt

$$\Box\, \delta_+ = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta.$$

Toon aan dat δ_+ homogeen is van de graad -2 en concludeer dat $\Box\, \delta_+$ homogeen is van de graad -4. Ga na dat $\partial^\alpha \delta$ homogeen is van de graad $-4 - |\alpha|$. Leid af dat $c \in \mathbb{C}$ bestaat met $\Box\, \delta_+ = c\delta$.

h) Ga na dat de definitie van $\delta_+(\phi)$ ook geldig is voor $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ wier drager de kegel Γ^+ doorsnijdt in een compacte verzameling. Kies daarom ϕ van de gedaante $\phi(x, t) = \psi(t)$ met $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Gebruik nu bolcordinaten in $\mathbb{R}^3$ om te bewijzen dat $c = 2\pi$. Concludeer (vergelijk met [Jackson, Formules (12.131/2)])

$$\Box\, E_+ = \delta, \qquad \text{indien} \qquad E_+(\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x, \|x\|)}{\|x\|}\, dx.$$

i) Zij $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ gegeven. Bewijs dat een oplossing $u \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ van de inhomogene golfvergelijking $\Box\, u = f$ wordt gegeven door de *geretardeerde potentiaal* (vergelijk met [P–P, Formule (14-23)])

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y, t - \|x - y\|)}{\|x - y\|}\, dy.$$

Opgave 3. Vierde-orde differentiaalvergelijking

Definieer de differentiaaloperator $P(\partial)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ door $P(\partial)u = \partial^4 u + u$.

a) Bewijs dat $P(\partial)u \in C^\infty(\mathbb{R})$ impliceert dat $u \in C^\infty(\mathbb{R})$. Concludeer dat $N \subset C^\infty(\mathbb{R})$ indien N de oplossingsruimte is van de homogene vergelijking $P(\partial)u = 0$.

b) Verifieer dat N in feite wordt opgespannen door de volgende vier functies:

$$x \mapsto e^{w(\pm 1 \pm i)x} \qquad \text{waarbij} \qquad w = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

en waarbij alle combinaties van de $+$ en $-$ tekens voorkomen. Concludeer $N \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{0\}$.

c) Beschouw een fundamentele oplossing E voor $P(\partial)$. Toon aan dat E niet behoort tot $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, maar dat er wel een unieke E bestaat z, dat $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Veronderstel dat $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. We onderzoeken nu de eigenschappen van u indien deze distributie voldoet aan de inhomogene vergelijking $P(\partial)u = f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

d) Bewijs dat in dit geval de conditie $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ noodzakelijk is. Beschouw nu het bijzondere geval van $f \in L^2(\mathbb{R})$.

e) Laat zien dat dan $\partial^j u \in L^2(\mathbb{R})$, voor $0 \leq j \leq 4$. Toon aan dat bovendien $u \in C^3(\mathbb{R})$, maar dat $u \notin C^4(\mathbb{R})$ indien $f \notin C(\mathbb{R})$.

f) Ga na dat $g \in L^2(\mathbb{R})$ indien $g(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{1+\xi^4}$, en bewijs dat een oplossing $u \in L^2(\mathbb{R})$ van $P(\partial)u = f$ uniek bepaald is en wordt gegeven door $u = \mathcal{F}^{-1}g$.

Definieer tenslotte $f \in L^2(\mathbb{R})$ door $f(x) = 2\,\mathrm{sgn}(x)e^{-|x|}$; merk op dat f discontinu in 0 is. We zullen bewijzen dat de oplossing $u \in L^2(\mathbb{R})$ van $P(\partial)u = f$ wordt gegeven door

$$(\star) \qquad u(x) = \mathrm{sgn}(x)e^{-|x|} \quad + e^{-w|x|} \ \ (\sin wx - \mathrm{sgn}(x)\cos wx).$$

g) Geef een bewijs a priori dat singsupp $u \subset \{0\}$.

h) Bepaal de oplossing u uit $(\star)$ op de wijze van onderdeel (vi). Bewijs hiertoe

$$\widehat{f}(\xi) = -4i\frac{\xi}{\xi^2+1}, \qquad \widehat{u}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{f}(\xi) - 2i\frac{\xi - \xi^3}{\xi^4+1}.$$

Bereken met complexe-functietheorie, voor alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\frac{\xi}{\xi^4+1}\,d\xi = \pi i e^{-w|x|}\sin wx =: h(x).$$

Merk op dat verschillende contouren nodig zijn al naar gelang $x > 0$ dan wel $x < 0$, en dat in dit laatste geval de contour met de wijzers van de klok mee wordt doorlopen, dan wel gebruik dat de integraal een oneven functie van x is. (Gebruik desgewenst de procedure `Residue` in Mathematica.) Concludeer vervolgens m.b.v. Fouriertheorie (gebruik eventueel Mathematica voor de differentiatie)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\frac{\xi^3}{\xi^4+1}\,d\xi = -\partial^2 h(x) = \pi i\ \mathrm{sgn}(x)e^{-w|x|}\cos wx.$$

(Merk op dat de laatstgenoemde integraal niet absoluut convergent is en in feite als Fouriergetransformeerde van een getemperde distributie moet worden genterpreteerd.) Concludeer dat u wordt gegeven door $(\star)$.

Achtergrond

Mathematica blijkt de laatste twee integralen ook direct te kunnen berekenen.

De situatie uit onderdeel e komt daadwerkelijk voor, want u uit $(\star)$ behoort wel tot $C^3(\mathbb{R})$ maar niet tot $C^4(\mathbb{R})$ (dwz., u is geen klassieke oplossing). Immers

$$u(0) = 0, \qquad \partial u(0) = -1 + \sqrt{2}, \qquad \partial^2 u(0) = 0, \qquad \partial^3 u(0) = -1,$$
$$\lim_{x\uparrow 0}\partial^4 u(x) = -2 \neq 2 = \lim_{x\downarrow 0}\partial^4 u(x).$$

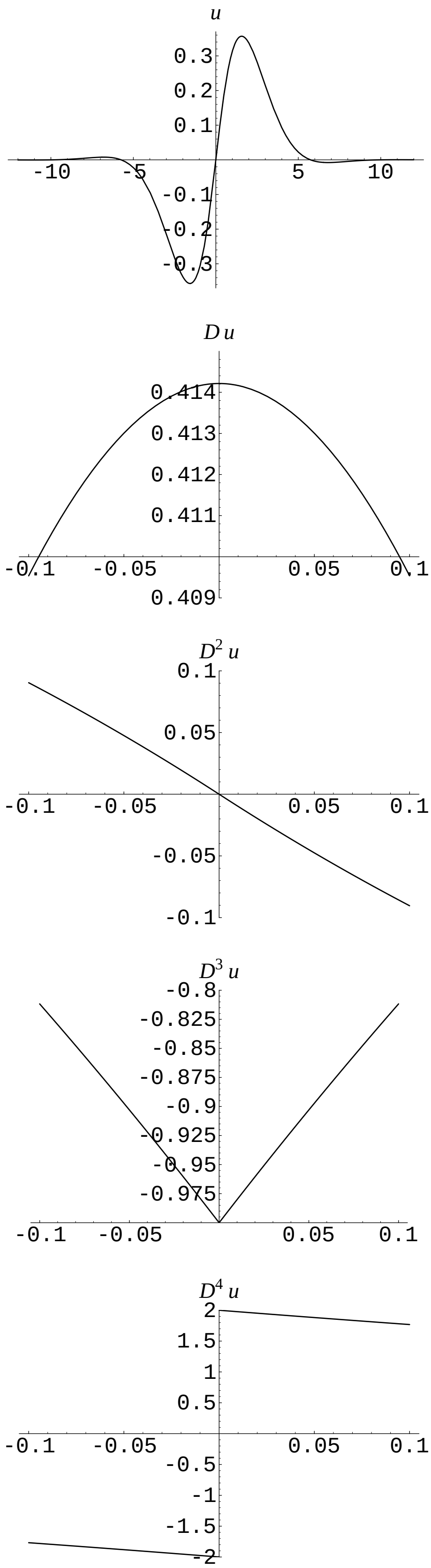
De onderstaande illustraties tonen de grafieken van u tot en met $\partial^4 u$.

De oplossing u in $(\star)$ kan op alternatieve wijze worden verkregen door van de L^2-oplossingen $u_\pm$ op $\pm\mathbb{R}_+$ gegeven door

$$\begin{aligned} u_+(x) &= \quad e^{-x} + a_+ e^{w(-1+i)x} + b_+ e^{w(-1-i)x}, && x \in \mathbb{R}_+, \\ u_-(x) &= -e^{x} \quad + a_- e^{w(\ \ 1+i)x} + b_- e^{w(\ \ 1-i)x}, && x \in -\mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

te eisen dat de nulde tot en met de derde afgeleide overeenstemmen in 0 en het resulterende stelsel lineaire vergelijkingen voor $a_\pm$ en $b_\pm$ op te lossen. Dit levert dan een berekening zonder complexe-functietheorie van de integralen

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\xi \cos x\xi}{\xi^4+1}\,d\xi = \frac{\pi}{2}e^{-w|x|}\sin wx, \qquad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\xi^3 \cos x\xi}{\xi^4+1}\,d\xi = \frac{\pi}{2}\,\operatorname{sgn}(x)e^{-w|x|}\cos wx.$$


u
0.3
0.2
0.1
-10
-5
5
10
-0.1
-0.2
-0.3
Du
0.414
0.413
0.412
0.411
-0.1
-0.05
0.05
0.1
0.409
$D^2 u$
0.1
0.05
-0.1
-0.05
0.05
0.1
-0.05
-0.1
$D^3 u$
-0.8
-0.825
-0.85
-0.875
-0.9
-0.925
-0.95
-0.975
-0.1
-0.05
0.05
0.1
$D^4 u$
2
1.5
1
0.5
-0.1
-0.05
0.05
0.1
-0.5
-1
-1.5
-2