# Hertentamen functionaalanalyse 18 maart 2011

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

Definieer op $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ voor $t \in \mathbb{R}$ de operator $U_t : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ door middel van $U_t\left((x_n)_n\right) = (y_n)_n$ met

$$\begin{aligned} y_{2k-1} &= x_{2k-1} \cos kt \; - \; x_{2k} \sin kt \\ y_{2k} &= x_{2k-1} \sin kt \; + \; x_{2k} \cos kt \end{aligned}$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$.

1. Ga na dat $U_t$ lineair en begrensd is.
2. Geef de matrix $A_t \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die $U_t$ ten opzichte van $e_{2k-1}$ en $e_{2k}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Hoe ziet de Jordan normaalvorm van $A_t$ eruit?
3. Laat zien dat $U_t$ unitair is en verifieer $U_{t+\tau} = U_t U_\tau$ voor alle $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Zij $T \in L(E, F)$ een operator tussen Banachruimten.

4. Veronderstel dat $E = F = H$ een Hilbertruimte is en laat zien dat

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx \mid y \rangle| \; .$$

5. Veronderstel dat $F = H$ een Hilbertruimte is en verifieer
$$\|T\| \;=\; \sup_{x\in E}\sup_{y\in H}\frac{|\langle Tx \mid y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \;.$$

6. Toon aan dat
$$\|T\| \;=\; \sup_{\substack{\alpha\in F^*\\ \|\alpha\|=1}}\;\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} |\alpha(Tx)| \;.$$

Zij $H$ een Hilbertruimte en $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (L(H))^{\mathbb{N}}$ een rij van operatoren met de eigenschap
$$\bigvee_{C>0} \quad \max\left(\sup_{l\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\|T_l^*T_k\|}\,,\,\sup_{l\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\|T_lT_k^*\|}\right) \;\le\; C \;.$$

7. Toon aan dat $\|T_k\| \le C$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

8. Definieer $S_n := \sum_{k=1}^{n} T_k$ en verifieer $S_n^*S_n = \sum_{k,l=1}^{n} T_l^*T_k$.

9. Laat zien dat
$$\|S_n\|^2 \;\le\; \sum_{k,l=1}^{n}\sqrt{\|T_l^*T_k\|}\cdot\sqrt{\|T_k^*T_l\|} \;.$$

10. Bewijs $\|S_n\| \le C$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

11. Zij $x \in H$ en $k, m, n \in \mathbb{N}$ met $m < n$. Ga na dat
$$\|S_nT_k^*x \;-\; S_mT_k^*x\| \;\le\; \sum_{l=m+1}^{n}\sqrt{\|T_kT_l^*\|}\cdot\sqrt{\|T_lT_k^*\|}\cdot\|x\| \;.$$

12. Gegeven $a_1, \ldots, a_m \ge 0$, verifieer $\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i} \;\le\; \sum_{i=1}^{m}\sqrt{a_i}$ .

13. Zij $F := < T_k^*x \mid x \in H, k \in \mathbb{N} >$ en $y \in \overline{F}$. Toon aan dat $(S_ny)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert.

14. Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} S_nz = 0$ voor alle $z \perp F$.

15. Concludeer dat $Sx := \lim_{n\to\infty} S_nx$ een begrensde operator op $H$ definieert met $\|S\| \le C$.