Eerste deeltentamen Functionaalanalyse

19 april 2012 , 9.00-12.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
- Het gebruik van aantekeningen en zelf meegebrachte literatuur zijn toegestaan.
- Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je er aan komt.

Opgave 1, 30 pt.
Toon bij elk van de volgende stellingen aan of hij juist of onjuist is, door middel van een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) $c_0 = \{a \in \ell^\infty \mid \lim_{k\to\infty} a_k = 0\}$ is niet separeerbaar.

(b) Elke Hilbert ruimte is reflexief.

(c) Voor een lineaire deelruimte A van een genormeerde ruimte X geldt $A^* = X^*|_Y$, waar $X^*|_Y := \{\alpha|_Y \mid \alpha \in X^*\}$ bestaat uit de beperking tot A van continue functionalen op X.

(d) Zij G de genormeerde ruimte $G = (C([0,1]), \|\,.\,\|_2)$. De afbeelding $S : G \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $S(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ is een begrensde lineaire functionaal.

Opgave 2, 30 pt.
Zij B de Banachruimte $B = (C([0,1]), \|\,.\,\|_\infty)$. Beschouw de Volterra integraaloperator $P : B \to B$ gegeven door $P(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Laat zien dat P een continue lineaire afbeelding is.

(b) Bepaal de norm van P.

(c) Laat zien dat $im(P)$ (het beeld van P) niet gesloten is in B.

(d) Is de lineaire afbeelding $D : im(P) \to B$ gegeven door $D(g)(x) = g'(x)$ begrensd? Bewijs uw bewering.

Opgave 3, 20 pt.
Zij H een separabele Hilbertruimte met compleet orthonormaalsysteem $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Veronderstel dat $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in H is, zodat $\lim_{n\to\infty} \langle h_n, e_k\rangle = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} \langle h_n, x\rangle = 0$ voor alle $x \in H$.

Opgave 4, 20 pt.
Zij E, F Banachruimten en $T : E \to F$ een lineaire afbeelding. Beschouw de verzameling $\Sigma(T) := \{y \in F \mid \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in E,\ x_n \to 0,\ Tx_n \to y\}$.

(a) Toon aan dat $\Sigma(T)$ een gesloten lineaire deelruimte van F is.

(b) Bewijs: $\Sigma(T) = \{0\}$ dan en slechts dan als T begrensd is. Hint: beschouw $\{(x_n, Tx_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.