antwoorden eerste deeltentamen functionaalanalyse 2012

Ludo Vromen

1.

(a) Onjuist. Vanwege opgave 2.8c is het voldoende een aftelbare deelverzameling $A \subset c_0$ te vinden zodat $\langle A \rangle$ dicht ligt; kies nu $A = \{e_i\}_i$. Expliciet (zonder opgave 2.8 te gebruiken): het rationale opspansel D van de standaardvectoren e_i is aftelbaar en dicht. Want gegeven $x \in c_0$ en $\epsilon > 0$, kies eerst N met $|x_n| < \epsilon$ voor $n > N$, en vervolgens $q_i \in \mathbb{Q}$ met $|x_i - q_i| < \epsilon$ voor alle $i \leq N$. Dan voldoet $q = (q_1, ..., q_N, 0, 0, ...) = \sum_{i \leq N} q_i e_i$ aan $q \in D$ en $\|x - q\|_\infty \leq \epsilon$.

(b) Juist. Uiteraard $X^*|_A \subset A^*$ (beperking tot lineaire deelruimte behoudt continuiteit en lineariteit). Omgekeerd is iedere continue functionaal op A uit te breiden tot X (met Hahn-Banach).

(c) Juist. Zie ook dictaat p.36. Zij $\phi_H : H \to H^*$ het isometrische isomorfisme van Riesz. Dan is $H \xrightarrow{\phi_H} H^* \xrightarrow{\phi_{H*}} H^{**}$ een isometrisch isomorfisme, en men rekent na dat dit gelijk is aan de standaard-embedding $H \to H^{**}$.

(d) Onjuist. De afbeelding S is duidelijk niet lineair.

2.

(a) Merk op dat inderdaad $Pf \in B$ als $f \in B$, omdat zelfs $Pf \in C^1[0,1]$ vanwege de 'hoofdstelling van analyse'. Lineariteit van P volgt uit lineariteit van integratie. Begrensdheid van P volgt uit $\|Pf\|_\infty \leq \sup_{x \in [0,1]} |x| \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$.

(b) We zagen al $\|P\| \leq 1$. Anderzijds voldoet $f \equiv 1$ aan $\|Pf\|_\infty = \|f\|_\infty$, dus $\|P\| = 1$.

(c) Merk op dat het beeld van P gelijk is aan $\{g \in C^1[0,1] \mid g(0) = 0\}$ ('hoofdstelling van analyse'). Dus het is voldoende een uniform convergente rij C^1-functies te vinden die verdwijnen in 0, maar wiens (noodzakelijke continue en in 0 verdwijnende) uniforme limiet *niet* differentieerbaar is (of wel differentieerbaar maar wiens afgeleide niet continu is). Dit zou toe doen moeten zijn.
Alternatief: Als het beeld gesloten is, volgt met *open mapping theorem* dat de inverse D van P begrensd is, in tegenspraak met opgave (d).

(d) De rij $f_n = (x \mapsto x^n) \in \mathrm{im}P$ voldoet aan $\|f_n\| = 1$ en $\|Df_n\| = \|nx^{n-1}\| = n$.
Alternatief: Merk op dat $D = T^{-1}$. Begrensdheid van D betekent $\exists C > 0$ met $\|x\| \leq C\|Px\|$ voor alle x. Dit zou impliceren dat het beeld gesloten is (in tegenspraak met het vorige onderdeel): als $Tx_i \to y$ dan impliceert $\|x_i - x_j\| \leq C\|Tx_i - Tx_j\|$ dat x_i Cauchy is, dus $x_i \to x$ voor zekere x, dus $y = Tx$ in het beeld.

3. Zij D het opspansel van de e_i; dan ligt D dicht in H en $\lim_n \langle h_n, d \rangle = 0$ voor alle $d \in D$. Zij $M := \sup_n \|h_n\|$, per aanname $M < \infty$. Zij $\phi_n = \langle h_n, - \rangle$. Dan $\phi_n \in H^*$ met $\|\phi_n\| = \|h_n\| \leq M$ (Riesz). Fix $h \in H$ en $\epsilon > 0$; kies $d \in D$ met $\|h - d\| < \epsilon$ (dit kan omdat D dicht ligt). Nu $|\phi_n(h)| \leq |\phi_n(h - d)| + |\phi_n d| \leq M\epsilon + \phi_n d$. Aangezien $\phi_n(d) \to 0$ volgt $\limsup_n |\phi_n(h)| \leq M\epsilon$. Aangezien $\epsilon > 0$ willekeurig was volgt $\limsup_n |\phi_n(h)| = 0$ oftewel $\phi_n(h) \to 0$.

4.

(a) Schrijf G_T voor de grafiek van T, en beschouw de afbeelding $f : F \to E \times F$ gegeven door $y \mapsto (0, y)$. Merk nu op dat $\Sigma(T) = f^{-1}(\overline{G_T})$. Aangezien G_T een lineaire deelruimte is van $E \times F$, is $\overline{G_T}$ een gesloten lineare deelruimte; verder is f lineair en continu. Daarmee is $\Sigma(T) = f^{-1}(\overline{G_T})$ een gesloten lineaire deelruimte van F.

(b) Vanwege het Closed Graph Theorem, is het voldoende aan te tonen dat $\Sigma(T) = \{0\}$ dan en slechts dan als G_T gesloten is. Als G_T gesloten is, geldt voor alle $y \in \Sigma(T)$ dat $(0, y) = f(y) \in \overline{G_T} = G_T$, dus $y = T0 = 0$; oftewel $\Sigma(T) = \{0\}$. Als omgekeerd $\Sigma(T) = \{0\}$, beschouw een convergente rij $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ in G_T en toon aan dat $y = Tx$. Inderdaad: $(x_n - x, T(x_n - x)) \to (0, y - Tx)$, zodat $(0, y - Tx) \in \overline{G_T}$ oftewel $y - Tx \in \Sigma(T) = \{0\}$.