Tweede deeltentamen Functionaalanalyse

18 januari 2013 , 9.00-12.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
- Het gebruik van aantekeningen en zelf meegebrachte literatuur zijn toegestaan, mits afkomstig van BlackBoard.
- Het eindcijfer van dit tentamen is min{10, (opgaven 1+2+3+BONUS)/10}.

Opgave 1, 30 pt.
Zij $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{k}e_{2k-1} + \frac{i}{k}e_{2k} \\ Te_{2k} &= -\frac{i}{k}e_{2k-1} + \frac{1}{k}e_{2k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Hierbij is e_n de n-de standaard-basisvector van $\ell^2(\mathbb{C})$.

(a) Bepaal de geadjungeerde van T.

(b) Laat zien dat T compact is.

(c) Geef de spectraalrepresentatie van T.

(d) Bepaal het spectrum van T, uitgesplitst naar punt-, continue en residuaal spectrum.

Opgave 2, 35 pt.
Zij $\Omega \subset \mathbb{R}$ en $\{f_n\}$ een rij continue functies van Ω naar $\mathbb{R}$. Als aan de volgende eisen is voldaan:

(i) Er is een $M > 0$ zodat $\|f_n\|_\infty < M$ voor alle $n = 1, 2, \ldots$,

(ii) Ω is compact,

(iii) De rij $\{f_n\}$ is uniform equicontinu,

dan zegt de stelling van Arzela-Ascoli dat de rij $\{f_n\}$ een deelrij heeft die in de $\|.\|_\infty$-norm convergeert naar een continue functie. Laat door middel van tegenvoorbeelden zien dat de conclusie van de stelling *niet* waar is als:

(a) wel aan (i) en (ii) is voldaan, maar niet aan (iii).

(b) wel aan (i) en (iii) is voldaan, maar niet aan (ii).

(c) wel aan (ii) en (iii) is voldaan, maar niet aan (i).

Opgave 3, 35 pt.
Zij $p \in C^1([0,1])$ met $p(x) > 0$ voor alle $x \in [0,1]$ en $q \in C([0,1])$. Beschouw de operator $L : C^2([0,1]) \to C([0,1])$

$$Lu = -(pu')' + qu$$

en definieer de operator $L_\lambda = L - \lambda I$.

(a) Laat zien dat als μ een eigenwaarde is van het Sturm-Liouville eigenwaardeprobleem $L_\lambda u = 0$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, dat de bijbehorende eigenruimte dimensie $= 1$ heeft.

(b) Stel μ is een eigenwaarde van het eigenwaardeprobleem uit (a), met bijbehorende eigenfunctie $v \in C^2([0,1])$. Zij $f \in C([0,1])$. Bewijs dat de vergelijking $L_\mu u = f$ met randwaarden $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ dan en slechts dan een oplossing heeft als $\int_0^1 f(x)v(x)\,dx = 0$.

(c) Neem $p(x) = 1$ en $q(x) = 0$. Bepaal de eigenwaarden van het Sturm-Liouville eigenwaardeprobleem $L_\lambda u = 0$, met periodieke randwaarden $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$.

(d) Stel μ is een eigenwaarde van het eigenwaardeprobleem uit (c). Formuleer onder welke voorwaarde(n) op de continue functie $f(x)$, de inhomogene vergelijking $L_\mu u = f$, $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$ een oplossing heeft.

BONUS opgave, 20 pt.
Zij $\mathcal{H}$ een complexe Hilbertruimte en $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ een begrensde lineaire afbeelding. Neem aan dat T zelfgeadjungeerd is. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(i) Er bestaat een reeks $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ in $\mathcal{H}$ met $||x_n|| = 1$ en

$$\lim_{n\to\infty} ||(\lambda - T)x_n|| = 0$$

(ii) $\lambda \in \sigma(T)$.