Herkansing Functionaalanalyse

15 maart 2013 , 9.00-12.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
- Het gebruik van aantekeningen en zelf meegebrachte literatuur zijn toegestaan, mits afkomstig van BlackBoard.

Opgave 1, 40 pt.
Toon bij elk van de volgende stellingen aan of hij juist of onjuist is, door middel van een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) Zij $g \in C([0,1])$ zodanig dat $Ran(g) \subset [0,1]$ en $F : C([0,1]) \to C([0,1])$ gedefinieerd door $F(f)(x) = f(g(x))$. Dan is $\|F\| = \|g\|_\infty$.

(b) Zij $\mathcal{H}$ een Hilbert ruimte, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineair, $Dom(A) = \mathcal{H}$ en $A = A^*$. Dan is A begrensd.

(c) De verzameling $V = \{f \in C^1([0,1]) \mid \|f\|_\infty = 1\}$ is een compacte deelverzameling van $C([0,1])$.

(d) Zij $\mathcal{H}$ een separabele Hilbert ruimte. Zij $N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ de nul-afbeelding, $Nx = 0$ voor alle $x \in \mathcal{H}$. Als $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ zelfgeadjungeerd en compact is en $T \neq N$, dan heeft T tenminste één eigenwaarde ongelijk aan 0.

Opgave 2, 20 pt.
Stel X en Y zijn Banach ruimten en $B : X \times Y \to \mathbb{C}$ is bilinear. De norm op $X \times Y$ is $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$.
Neem aan dat $T_x : Y \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $T_x y = B(x,y)$ voor elke $x \in X$ begrensd is, evenals $T_y : X \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $T_y x = B(x,y)$, voor elke $y \in Y$.

(a) Toon aan dat er een $K > 0$ bestaat zodat $\|T_x\| \le K\|x\|$, voor alle $x \in X$. Hint: Uniform Boundedness principe.

(b) Toon aan dat B continu is.

Opgave 3, 40 pt.
Zij $\mathcal{H}$ een separabele Hilbert ruimte, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ compact en zelfgeadjungeerd. Zij $x \in \mathcal{H}$ zodanig dat $Tx \neq 0$.

(a) Laat zien dat $T^n x \neq 0$, voor alle $n = 1, 2, \ldots$.

(b) Laat zien dat voor alle $n = 1, 2, \ldots$ geldt: $\|T^n x\|^2 \leq \|T^{n-1}x\| \|T^{n+1}x\|$.

(c) Laat zien dat de rij in $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ gegeven door $a_n = \dfrac{\|T^{n+1}x\|}{\|T^n x\|}$ convergeert.

(d) Laat zien dat de limiet van bovenstaande rij gelijk is aan $|\lambda|$, waarbij λ een eigenwaarde is van T.