Uitwerkingen tentamen Functionaalanalyse

3 februari 2005

Opgave 1

a) Juist. Elke eindigdimensionale lineaire ruimte is volledig (alle normen zijn equivalent met Euclidische norm). V is dus een Banachruimte, dus een convergent rijtje van elementen uit V convergeert naar een element uit V.

b) Niet juist. Neem bijvoorbeeld $f(x) = 1/x$.

c) Niet juist. Bekijk de functie $f(x) = c > 0$.

Opgave 2

a) Een voorbeeld is de functie die gelijk $2n$ is op het interval $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$ en 0 elders. Het is makkelijk na te gaan dat deze rij functies aan de eisen voldoet.

b) Een voorbeeld is de functie die overal gelijk is aan 0 behalve in n punt daar is hij $\sqrt{n}$. Het is makkelijk na te gaan dat deze rij functies aan de eisen voldoet.

c) Stel de rij functies $\pi_n : \ell^2 \to \ell^2$, gedefinieerd door $x \to x_n e_n$. De eisen zijn makkelijk te controleren.

d) Stel $K = \{\{a_1, \dots\} \in \ell^2 | a_{2m} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$ (dus alle even posities hebben waarde 0). $K^\perp$ is dan de verzameling van waarden die op alle oneven posities de waarde 0 hebben. Beide verzamelingen hebben oneindige dimensie.

Opgave 3

We weten dat $[-\pi, \pi]$ compact is, dus geldt dat $C([-\pi, \pi]) \subseteq L^2([-\pi, \pi])$. Voor elke $f(x) \in L^2([-\pi, \pi])$ weten we dat we het op de volgende manier kunnen schrijven: $f(x) = a + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \cos(nx) + \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \sin(nx)$.
Via $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ volgt $a = 0$, dus $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \cos(nx) + \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \sin(nx)$.
Er geldt:
$||f||_2^2 = \int_{\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum |b_n|^2 + \sum |c_n|^2$

Voor de afgeleide van $f(x)$ geldt dat we sommatie en differentiatie mogen verwisselen: $f'(x) = -\sum nb_n \sin(nx) + \sum nc_n \cos(nx)$. Voor de norm geldt dan nu het volgende: $||f'(x)||_2^2 = \sum |nb_n|^2 + \sum |nc_n|^2$
Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt de termsgewijze ongelijkheid $|a_n| + |b_n| \leqslant n(|a_n| + |b_n|)$, alleen voor $n = 1$ geldt er gelijkheid. Hieruit volgt dat de sommaties dezelfde ongelijkheid vertonen, wat voor de norm het volgende gevolg heeft: $||f||_2 \leqslant ||f'||_2$.
We merken op onze termsgewijze afschatting, alleen gelijkheid geeft voor $n = 1$, wat direct de laatste uitspraak bewijst.

Opgave 4
A.
$c_0 \subseteq l^\infty$ en l^∞ is een Banachruimte. Het enige wat we dus nog moeten bewijzen is dat c_0 gesloten is.
Laat $\{a^n\} = \{a^1, a^2, \ldots\}$ een rij met $a^n \in c_0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, zodanig dat hij convergeert naar $a \in l^\infty$, dus a is een limietpunt van c_0. We moeten nu bewijzen dat $a \in c_0$.

Nu volgt uit de definitie van c_0 de volgende eigenschap (1):
$\forall n, \forall \epsilon > 0, \exists N_n$, zodanig dat $k > N_n \Rightarrow |a_k^n| < \epsilon$
En uit het feit dat a de limiet is volgt eigenschap (2):
$\forall \epsilon > 0, \exists M$ zodanig dat $n > M \Rightarrow ||a^n - a||_\infty < \epsilon$
Doordat het een supremumnorm betreft volgt dat
$\forall \epsilon > 0, \exists M, \forall n > M, \forall k \geq 1, \Rightarrow |a_k^n - a_k| \leq ||a^n - a||_\infty < \epsilon$
Nu moet bewezen worden $\forall \epsilon > 0, \exists K > 0$ zodanig dat $k > K \Rightarrow |a_k| < \epsilon$, wat equivalent is met $a \in c_0$
Uit eigenschap 2 kiezen we $M \in \mathbb{N}$ groot genoeg, zodat $n \geq M \Rightarrow |a_k^n - a_k| < \frac{\epsilon}{2}$ (dit geldt voor alle $k \in \mathbb{N}$).
Uit eigenschap 1 kiezen we nu voor $n = M$ de waarde N_M groot genoeg, zodat $k > N_M \Rightarrow |a_k^n| < \frac{\epsilon}{2}$
Neem nu $K = N_M$ en $n = M$, zoals hierboven gedefinieerd, dan volgt dat voor $k > K$:
$|a_k| = |a_k + a_k^M - a_k^M| \leqq |a_k^M - a_k| + |a_k^M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

B.
Definieer $\Lambda = \sum |\lambda_n| < \infty$ en de functie:
f: $c_0 \to \mathbb{R}$
f: $\{a_n\} \mapsto \sum \lambda_n a_n$

We moeten aantonen dat f begrensd is en berekenen wat $||f||$ is.
$|f(a)| = |\sum \lambda_n a_n| \leqq \sum |\lambda_n||a_n| \leqq ||a_n||_\infty \Lambda$
Dan volgt $||f|| = sup_{||a||_\infty = 1}||f(a)|| \leqq \Lambda$ en zodanig is f dus begrensd. Sterker nog we hebben een bovengrens voor $||f||$.

We gaan nu een rij $a^n \subset c_0$ met $||a_n||_\infty = 1$ vinden. We tonen aan dat de limiet $lim_{n\to\infty} a^n = a$. Dan hebben we $||f(a)|| = \Lambda$ en aangezien dit een ondergrens geeft, volgt dan dat $||f|| = \Lambda$.
Nu $a_k^n = sign(\lambda_k)$ voor $k \leqq n$, anders 0. (hierdoor zitten de elementen in c_0).
De rij convergeert duidelijk naar $a_k = sign(\lambda_k) \forall k$, welke in l^∞ zit en doordat c_0 een Banachruimte is, volgt dat $a \in c_0$.
$|f(a)| = |\sum \lambda_k sign(\lambda_k)| = |\sum |\lambda_k|| = \sum |\lambda_k| = \Lambda$ en aangezien $||a||_\infty = 1$, hebben we exact wat we zochten. Het volgt dus dat $||f|| = \Lambda$.

Opgave 5
Zij $0 < \alpha < 1$ en definiëer de ruimte $C_\alpha([a,b])$ van functies $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ waarvoor een constante $0 < k < \infty$ bestaat zodanig dat $|u(x) - u(y)| \leq k|x-y|^\alpha$, voor alle $x, y \in [a,b]$. Voor elke $u \in C_\alpha([a,b])$ definiëer

$$\|u\| = \sup_{x\in[a,b]} |u(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

(a) Laat zien dat $(C_\alpha([a,b]), \|\cdot\|)$ een genormeerde ruimte is.

Bewijs. Eerst laten we zien dat $(C_\alpha([a,b]), \|\cdot\|)$ een vectorruimte is. Merk daarvoor op dat $C_\alpha \subset C([a,b])$. Zij immers $\epsilon > 0$ en kies

$$\delta := \frac{\epsilon^{1/\alpha}}{2k}$$

Dan geldt voor alle $x \in B(y,\delta)$ dat

$$|u(x) - u(y)| \leq k|x-y|^\alpha \leq k\delta \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Duidelijk $0 \in (C_\alpha([a,b]), \|\cdot\|)$. Verder voor $u, v \in C_\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$

$$|(u+\lambda v)(x) + (u+\lambda v)(y)| \leq |u(x) - u(y)| + |\lambda v(x) - \lambda v(y)| \leq k(1+\lambda)|x-y|^\alpha$$

en dus $u + \lambda v \in C_\alpha$.

We laten zien dat $\|\cdot\|$ een norm is. We weten dat $\|\cdot\|_\infty$ een norm is. Merk op dat $0 \leq \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq k$, dus $\|u\| \geq 0$. Zij $\|u\| = 0$ dan $\|u\|_\infty = 0$ en dus $u = 0$. De andere kant op is triviaal. $\|\lambda u\| = \lambda\|u\|$ omdat: $\sup \lambda A = \lambda \sup A$. De driehoeksongelijkheid:

$$\begin{aligned}
\|u+v\| &= \|u+v\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|(u+v)(x)-(u+v)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|+|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \|u\|_\infty + \|v\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{x\neq y} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \|u\| + \|v\|
\end{aligned}$$

□

(b) Laat zien dat $(C_\alpha([a,b]), \|\cdot\|)$ een Banachruimte is.

Bewijs. Zij $\{f_n\}$ een Cauchyrij in C_α. Dan is $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|$$

en dus $\{f_n\}$ een Cauchyrij ten opzichte van $\|\cdot\|_\infty$. Dus, omdat $C([a,b])$ volledig is ten opzichte van de supnorm, bestaat er een f die continu is zodat $\lim_{n\to\infty} f_n$ uniform naar f convergeert ten opzichte van $\|\cdot\|_\infty$. Claim: $f \in C_\alpha$. Voor alle $n > N$ voor groot N groot genoeg:

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(y)+f_n(y)-f(y)| && (1)\\
&\leq 2\|f_n - f\|_\infty + |f_n(x)-f_n(y)| && (2)\\
&< \epsilon + |x-y|^\alpha \sup_{v\neq z} \frac{|f_n(v)-f_n(z)|}{|v-z|^\alpha} && (3)
\end{aligned}$$

Omdat $\{f_n\}$ een Cauchyrij is, bestaat er een $M > 0$ zodat $\sup_{x\neq y} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq M$. We zien dan dat $|f(x)-f(y)| < \epsilon + M|x-y|^\alpha$. Dus, met bijvoorbeeld $\epsilon = |x-y|^\alpha$, $f \in C_\alpha$. We laten nog zien dat f ook de limiet ten opzichte van $\|\cdot\|$ is. Zij N zodat voor alle $n > N$, $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$. Voor $n > N$ geldt dan:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \|f_n - f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f_n(x) - f(x) - (f_n(y) - f(y))|}{|x-y|^\alpha} && (4) \\ &< \epsilon + \sup_{x \neq y} \frac{|\epsilon - \epsilon|}{|x-y|^\alpha} && (5) \\ &= \epsilon. && (6) \end{aligned}$$

□

(c) Laat zien dat de verzameling $A = \{u \in C_\alpha([a,b]), \|u\| \leq 1\}$ uniform equicontinu is.

Bewijs. Zij $\epsilon > 0$. We zoeken een $\delta > 0$ zodat

$$|x - y| < \delta \to \sup_{u \in A} |u(x) - u(y)| < \epsilon.$$

Kies $\delta := \epsilon^{1/\alpha}$. Dan geldt voor alle x, y zodat $|x - y| < \delta$ en alle $u \in A$:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &< |x-y|^\alpha \sup_{v \neq z} \frac{|u(v) - u(z)|}{|v - z|^\alpha} && (7) \\ &\leq \delta^\alpha && (8) \\ &= \epsilon && (9) \end{aligned}$$

□