

Hertentamen functionaalanalyse (WISB315) 23 maart 2007

- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.

Opgave 1

Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalstelsel $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $T : H \rightarrow H$ de d.m.v.

$$\begin{aligned}Te_{3k-2} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-1} + e_{3k}) \\Te_{3k-1} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-2} + e_{3k}) \\Te_{3k} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-2} + e_{3k-1})\end{aligned}$$

gedefinieerde continue lineaire operator.

- Geef de matrix $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \subseteq M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. $\{e_{3k-2}, e_{3k-1}, e_{3k}\}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over \mathbb{R} diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over \mathbb{C} eruit?
- Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is.
- Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?
- Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda \pi_\lambda$.
- Hoe ziet de polaire decompositie van T eruit?

Opgave 2

Gegeven zijn twee Hilbertruimten E en F , in het vervolg maken we in de notatie geen verschil tussen de door de inproducten geïnduceerden normen $\|y\| = \|y\|_E$ op E en $\|z\| = \|z\|_F$ op F .

- Ga na dat de volgende normen op het cartesische product $E \times F$ equivalent zijn:

$$\|(y, z)\|_1 := \|y\| + \|z\|, \quad \|(y, z)\|_2 := (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \|(y, z)\|_\infty := \max\{\|y\|, \|z\|\}.$$

Met welke van deze normen is ook $E \times F$ (isometrisch isomorf met) een Hilbertruimte?

- Kies één van bovenstaande normen en laat zien dat de vier lineaire operatoren

$$\begin{aligned}\iota_E : E &\rightarrow E \times F, & \iota_E(y) &= (y, 0) \\ \iota_F : F &\rightarrow E \times F, & \iota_F(z) &= (0, z) \\ \pi_E : E \times F &\rightarrow E, & \pi_E(y, z) &= y \\ \pi_F : E \times F &\rightarrow F, & \pi_F(y, z) &= z\end{aligned}$$

continu zijn. In hoeverre is dit afhankelijk van de norm die je hebt gekozen?

- c) Zij H een Hilbertruimte en $E, F < H$ gesloten deelruimten met $H = E + F$ en $E \cap F = \{0\}$, dus elk element $x \in H$ kan op precies één manier worden geschreven als som $x = y + z$ van elementen $y \in E$ en $z \in F$. Onder welke voorwaarden is H isometrisch isomorf met $E \times F$?

Opgave 3

Gebruik op ℓ^2 het volledig orthonormaalstelsel $((\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ en definieer $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ d.m.v. de door

$$t_{kl} = e^{-k-l} \quad \text{voor alle } k, l \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

gegeven oneindige matrix.

- a) Laat zien dat T een continue lineaire operator is.
- b) Ga na dat T zelfgeadjungeerd is.
- c) Bereken de Hilbert–Schmidt norm $\|T\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ van T en concludeer dat T compact is.
- d) Verifieer dat $(e^{-k})_{k \in \mathbb{N}}$ een eigenvector van T is en dat alle vectoren loodrecht hierop in $\ker T$ liggen. *Hint:* $\|T\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^2$ waar $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de rij van eigenwaarden is (waarin elke eigenwaarde zo vaak voorkomt als zijn multipliciteit aangeeft).
- e) Bereken $\|T\|$ en de spectrale representatie van T .