

Functionaalanalyse (WISB315) 2 februari 2007

- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.

Opgave 1

Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalstelsel $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $T : H \rightarrow H$ de d.m.v. $Te_k = e_{2k}$ gedefinieerde continue lineaire operator.

- Laat zien dat T een isometrie is en bereken de geadjungeerde operator T^* .
- Bepaal de eigenwaarden van T^* . *Hint:* je kunt hiervoor de voor de linker shift gebruikte constructie aanpassen.
- Ga na dat elke eigenruimte van T^* oneindige dimensie heeft.
- Bereken het spectrum $\sigma(T)$.

Opgave 2

Zij H een (oneindig-dimensionale) Hilbertruimte. Schrijf

$$\mathcal{F}(H) := \{T \in L(H) \mid \text{im } T \text{ is gesloten, } \dim(\text{im } T)^\perp < \infty \text{ en } \dim \ker T < \infty\}$$

voor de verzameling van zogenaamde Fredholmoperatoren.

- Laat zien dat voor een zelfgeadjungeerde compacte operator A de operator $\text{id} - A$ een Fredholmoperator is.
- Laat zien dat voor elke compacte operator A de operator $\text{id} - A$ een Fredholmoperator is.
- Zij E nu een Banachruimte en $T \in L(E)$. Doel van deze deelopgave is om een uitbreiding van de definitie van Fredholmoperatoren naar deze setting te vinden. Geef een vervanging voor $(\text{im } T)^\perp$ die in het geval van een Hilbertruimte dezelfde dimensie heeft. Gebruik deze om de verzameling $\mathcal{F}(E) \subseteq L(E)$ van Fredholmoperatoren op E te definiëren. Ga na dat ook dan voor elke compacte operator A de operator $\text{id} - A$ een Fredholmoperator is.

Opgave 3

Gebruik op ℓ^2 het volledig orthonormaalstelsel $(e_n)_n$ met $e_n = (\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$ om de continue lineaire operator $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ als volgt te definiëren:

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{k} (e_{2k-1} - e_{2k}) \\ Te_{2k} &= \frac{1}{k} (e_{2k-1} + e_{2k}) \end{aligned}$$

- a) Geef de matrix $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespannen invariante deelruimte representeert. Is A over \mathbb{R} diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over \mathbb{C} eruit?
- b) Laat zien dat T compact is. Is T zelfs een Hilbert-Schmidt operator?
- c) Bereken T^*T en de spectrale representatie

$$T^*T = \sum_{\lambda \in \sigma(T^*T)} \lambda \pi_\lambda.$$

- d) Hoe ziet de polaire decompositie van T eruit?