Hertentamen functionaalanalyse 18 maart 2008

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Definieer op $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ de operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v.

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \quad = \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

met $y_{2k-1} := x_{2k-1} - x_{2k}$ en $y_{2k} := x_{2k-1} + x_{2k}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

(*i*) Ga na dat T lineair en begrensd is.

(*ii*) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A eruit?

(*iii*) Laat zien dat T normaal is.

(*iv*) Bepaal de polaire decompositie van T.

2. Zij $F < H$ een gesloten deelruimte van de Hilbertruimte H en $\pi \in L(H)$ de orthogonale projectie op F.

(*i*) Gegeven een Banachruimte G, laat zien dat een lineaire operator $T : H \longrightarrow G$ dan en slechts dan begrensd is als de restricties $T_{|F} : F \longrightarrow G$ en $T_{|F^\perp} : F^\perp \longrightarrow G$ allebei begrensd zijn.

(*ii*) Gegeven een Banachruimte E, laat zien dat $T : E \longrightarrow H$ dan en slechts dan lineair en begrensd is als de composities $\pi \circ T : E \longrightarrow F$ en $(1-\pi) \circ T : E \longrightarrow F^{\perp}$ allebei lineair en begrensd zijn.

(*iii*) Gegeven een lineaire operator $T : H \longrightarrow H$, laat zien dat $T \in L(H)$ dan en slechts dan als alle vier lineaire operatoren $\pi \circ T_{|F}$, $\pi \circ T_{|F^{\perp}}$, $(1-\pi) \circ T_{|F}$ en $(1-\pi) \circ T_{|F^{\perp}}$ begrensd zijn.

(*iv*) Zij F invariant onder $T \in L(H)$, bereken het spectrum $\sigma(T)$ uit $\sigma(\pi \circ T_{|F})$, $\sigma(\pi \circ T_{|F^{\perp}})$, $\sigma((1-\pi) \circ T_{|F}) = \{0\}$ en $\sigma((1-\pi) \circ T_{|F^{\perp}})$.

3. Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $n_k := \frac{1}{2}k(k-1) = \sum_{l=1}^{k-1} l$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Definieer d.m.v.

$$T(e_j) \quad := \quad \frac{1}{k^2} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} e_i \quad \text{voor alle } k \in \mathbb{N} \text{ en alle } j = n_k+1, \ldots, n_{k+1}$$

een continue lineaire operator $T : H \longrightarrow H$.

(*i*) Geef de matrices $A_2 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ en $A_3 \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ aan die T t.o.v. $\{e_2, e_3\}$ en $\{e_4, e_5, e_6\}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimten representeren en bereken hun eigenwaarden. Is A_3 diagonaliseerbaar?

(*ii*) Beschrijf voor alle $k \in \mathbb{N}$ de matrix A_k die T t.o.v. $\{e_j \mid j = n_k + 1, \ldots, n_{k+1}\}$ op de hierdoor opgespande deelruimte representeert, de eigenwaarden van A_k en de bijbehorende eigenruimten.

(*iii*) Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is. Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(*iv*) Bepaal de ingrediënten van de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda \, \pi_\lambda$.