Tentamen Elementaire Getaltheorie (WISB321)
16 januari 2012, 9.00-12.00 uur

• Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer.
• Bij dit deeltentamen mogen geen dictaat, boek, aantekeningen, uitwerkingen en grafische of andere geavanceerde rekenmachines worden gebruikt.
• **Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.**

Succes!

Opgave 1

Bepaal het *kleinste positieve gehele getal* x dat voldoet aan de drie congruentievergelijkingen

$$x \equiv 6 \bmod 11\,, \quad x \equiv 8 \bmod 25\,, \quad x \equiv 13 \bmod 27\,.$$

Opgave 2

a. Laat zien dat 293 een priemgetal is.
(Opmerking: dit kan zonder ingewikkelde priemgetaltesten.)

b. Heeft de congruentievergelijking $x^2 \equiv 10 \bmod 293$ een oplossing $x \in \mathbb{Z}$?

c. Bepaal het kleinste positieve gehele getal a dat voldoet aan de congruentie $10^{146} \equiv a \bmod 293$.

d. Bepaal het 146-ste cijfer achter de komma in de decimale ontwikkeling van $\dfrac{1}{293}$.

Opgave 3

Per definitie wordt de kettingbreukontwikkeling $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ van een irrationaal getal α gegeven door het recursieve algoritme $x_0 = \alpha$, $a_n = [x_n]$, $x_{n+1} = 1/(x_n - a_n)$ voor $n \geq 0$; hierbij is $[x_n]$ het grootste gehele getal $\leq x_n$.

a. Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $\alpha = \frac{1}{11}(6 + \sqrt{47})$ en laat zien dat deze periodiek is.

b. Bepaal met behulp van het voorgaande onderdeel de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{47}$.

Opgave 4

In deze opgave is, net als in het dictaat, $\mathbb{N}$ de verzameling van de gehele getallen ≥ 1 en is $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ de Möbius functie. Zij $\lambda = \mu * \mu$ het convolutieproduct van μ met zichzelf (t.a.v. de vermenigvuldiging in $\mathbb{N}$).
Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n > 1$ geldt:

$$\lambda(n) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{er is een } k \in \mathbb{N}\,,\ k > 1 \text{ zo dat } k^3 \mid n$$

EINDE