Hertentamen Elementaire Getaltheorie (WISB321)
12 maart 2012, 9.00-12.00 uur

• Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer.
• Bij dit deeltentamen mogen geen dictaat, boek, aantekeningen, uitwerkingen en grafische of andere geavanceerde rekenmachines worden gebruikt.
• **Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.**

Succes!

Opgave 1

Bepaal het *kleinste positieve gehele getal* x dat voldoet aan de drie congruentievergelijkingen

$$x \equiv 5 \bmod 7\,, \quad x \equiv 11 \bmod 17\,, \quad x \equiv 13 \bmod 23\,.$$

Opgave 2

a. Geef de priemfactorisatie van 141.

b. Heeft de congruentievergelijking $x^2 \equiv 10 \bmod 141$ een oplossing $x \in \mathbb{Z}$?

c. Bepaal het kleinste positieve gehele getal a dat voldoet aan de congruentie $10^{70} \equiv a \bmod 141$.

d. Bepaal het 70-ste cijfer achter de komma in de decimale ontwikkeling van $\dfrac{1}{141}$.

Opgave 3

Per definitie wordt de kettingbreukontwikkeling $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ van een irrationaal getal α gegeven door het recursieve algoritme $x_0 = \alpha$, $a_n = [x_n]$, $x_{n+1} = 1/(x_n - a_n)$ voor $n \geq 0$; hierbij is $[x_n]$ het grootste gehele getal $\leq x_n$.

a. Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $\alpha = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{37})$ en laat zien dat deze zuiver periodiek (= purely periodic) is.

b. Bepaal het getal β met zuiver periodieke kettingbreukontwikkeling $[\overline{1, 1, 5}]$.

Opgave 4

In deze opgave is, net als in het dictaat, $\mathbb{N}$ de verzameling van de gehele getallen ≥ 1 en is $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ de Möbius functie. Verder wordt de aritmetische functie $\nu : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ gedefinieerd door $\nu(n) = |\mu(n)|$ (absolute waarde). Zij $\lambda = \mu * \nu$ het convolutieproduct van μ en ν (t.a.v. de vermenigvuldiging in $\mathbb{N}$).

a. Bewijs dat, als $\lambda(n) \neq 0$ is, dan is n een kwadraat.

b. Impliceert $\lambda(n) = 0$, dat n geen kwadraat is? Motiveer je antwoord.

EINDE

puntenverdeling:
Opgave 1: 20 pnt
Opgave 2: a 8, b 7, c 7, d 8 pnt
Opgave 3: a 18, b 7 pnt
Opgave 4: 25 pnt