Elementaire Getaltheorie

Deeltentamen, 14 jan 2013, 9-12 uur

OPGAVEN

1. (a) (1 pt) Los $y^2 = 4x^3 + 1$ op in $x, y \in \mathbb{Z}$.
   (b) (1 pt) Geef aan hoe je oneindig veel drietallen $x, y, z \in \mathbb{N}$ kunt construeren met de eigenschap $x^2 + y^2 = z^3$.

2. (a) (1 pt) Bewijs dat 31 niet geschreven kan worden als som van 15 vierde machten.
   (b) (1 pt) Bewijs dat er oneindig veel getallen zijn die niet kunnen worden geschreven als som van 15 vierde machten.

3. (2 pt) Stel $a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$. Laat zien dat uit het ABC-vermoeden volgt dat $x^a y^b - z^c = 1$ hooguit eindig veel oplossingen in $x, y, z \in \mathbb{N}$ heeft.

4. Gebruik in de volgende onderdelen de priemgetalstelling.

   (a) (1 pt) Laat zien dat er een constante $c_1 > 0$ bestaat zó dat

   $$\sum_{p \leq x,\ p \text{ priem}} p < c_1 \frac{x^2}{\log x}$$

   voor alle $x \geq 10$.

   (b) (1 pt) Laat zien dat er een constante $c_2 > 0$ bestaat zó dat

   $$\sum_{p \leq x,\ p \text{ priem}} p > c_2 \frac{x^2}{\log x}$$

   voor alle $x \geq 10$.

5. Zij p een priemgetal en stel dat $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$. Met ω geven we de primitieve derde eenheidswortel $e^{2\pi i/3} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ aan.

   (a) (1 pt) Laat zien dat er een karakter $\chi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ van orde 3 bestaat.
   (b) (1/2 pt) Laat zien dat de Jacobisom $J = \sum_{x=2}^{p-1} \chi(x)\chi(1-x)$ van de vorm $a + b\omega$ is met $a, b \in \mathbb{Z}$. Verder is gegeven dat $|J| = \sqrt{p}$.
   (c) (1/2 pt) Laat zien dat er gehele getallen a, b bestaan zó dat $p = a^2 - ab + b^2$.