Elementaire getaltheorie

Toets III WISB321, 22 oktober 2014

1. In deze opgave mag je gebruiken dat $r_2(p^k)/4$ gelijk is aan $k+1$ als p priem is en $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, en de multiplicativiteit van $r_2(n)/4$ ($r_2(n)$ is hier het aantal oplossingen van $n = x^2 + y^2$ in $x, y \in \mathbb{Z}$).

   Gegeven is dat 389 een priemgetal is en dat $389 = 17^2 + 10^2$. Stel $N = 9 \times 389$.

   (a) (1 pt) Hoeveel oplossingen heeft $N = x^2 + y^2$ in $x, y \in \mathbb{Z}$?

   (b) (1 pt) Geef alle oplossingen met $x, y > 0$.

   (c) (1 pt) Hoeveel oplossingen heeft $389^2 = x^2 + y^2$ in $x, y \in \mathbb{Z}$?

   (d) (1 pt) Geef alle oplossingen met $x, y > 0$.

2. (a) (2 pt) Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{41}$.

   (b) (1 pt) Bepaal de eerste drie convergenten van deze kettingbreuk.

3. (a) (1 pt) Bepaal een natuurlijk getal dat niet te schrijven is als som hooguit 36 vijfde machten.

   (b) (2 pt) In dit onderdeel willen we natuurlijke getallen schrijven als som van oneven kwadraten. Zij $N \in \mathbb{N}$ en stel dat $N \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 8)$ en N deelbaar door 3, maar niet door 9. Stel dat N te schrijven is als som van k oneven kwadraten. Bewijs dat $k \geq 10$. (Hint: gebruik dat oneven kwadraten altijd 1 modulo 8 zijn)