

## Elementaire Getaltheorie, 2-1-2014, 9-12 u.

Bij dit tentamen is gebruik van boeken, dictaat of aantekeningen niet toegestaan. Als rekenhulp kun je een eenvoudige calculator gebruiken (dus geen GR of smartphone). Als je een onderdeel mist mag je wel het resultaat ervan in de volgende onderdelen gebruiken.

Motiveer je antwoorden!

Veel succes!

1. (a) (1/2 pt) Bepaal  $\phi(396)$ .  
Beschouw de vergelijking  $x^6 \equiv x \pmod{396}$  in  $x \in \mathbb{Z}/396\mathbb{Z}$ .
  - (b) (1/2 pt) Geef minstens één oplossing met  $x \not\equiv 0, 1 \pmod{396}$ .
  - (c) (1 pt) Hoeveel oplossingen heeft de congruëntievergelijking?
2. (a) (1 pt) Zij  $x$  een natuurlijk getal zó dat  $x > 2$  en  $x \equiv 2 \pmod{5}$ .  
Bewijs dat  $x^2 - 5$  een priemdeeler  $p$  heeft met  $p \equiv -1 \pmod{5}$ .
  - (b) (1 pt) Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen  $p$  van de vorm  $p \equiv -1 \pmod{5}$  zijn.
3. Zij  $p, q$  een tweetal priemgetallen en er is gegeven dat  $p \equiv -1 \pmod{4}$ .  
Beschouw de vergelijking  $p^x - q^y = 1$  in  $x, y \in \mathbb{N}$ . Stel dat er minstens één oplossing bestaat.
  - (a) (1/2 pt) Bewijs dat  $p - 1$  een macht van  $q$  is.
  - (b) (1/2 pt) Bewijs dat  $y$  oneven is en dat  $q + 1$  een macht van  $p$  is.
  - (c) (1/2 pt) Bewijs dat  $p = 3, q = 2$ .
  - (d) (1/2 pt) Los de vergelijking  $3^x - 2^y = 1$  op in  $x, y \in \mathbb{N}$ .
4. (a) (1 pt) Bepaal de kettingbreuk van  $\sqrt{29}$ .
  - (b) (1 pt) Bepaal een niet-triviale oplossing (d.w.z.  $y \neq 0$ ) van  $x^2 - 29y^2 = 1$  in  $x, y \in \mathbb{N}$ .
5. Een machtrijk getal is een natuurlijk getal  $m > 1$  zó dat alle priemfactoren van  $m$  tot de macht 3 of hoger in de ontbinding voorkomen.  
Laat zien dat het abc-vermoeden het bestaan van een constante  $c > 0$  impliceert zó dat voor elk machtrijk getal  $m$  en elk kwadraat  $n^2$  met  $n^2 < m$  geldt:

$$m - n^2 > cm^{1/10}.$$

Geef eerst de afleiding voor die gevallen waarin  $\text{ggd}(n^2, m) = 1$  (3/2 pt), bewijs daarna de ongelijkheid in het algemeen (1/2 pt).