Herkansing Elementaire Getaltheorie (WISB321)

Tentamen, 22 december 2014, 9:00 -12:00 uur

Bij dit tentamen is gebruik van boeken, dictaat of aantekeningen niet toegestaan. Als rekenhulp kun je een eenvoudige calculator gebruiken (dus geen GR of smartphone). Als je een onderdeel mist mag je wel het resultaat ervan in de volgende onderdelen gebruiken.
Motiveer je antwoorden!
Veel succes!

1. (a) (1 pt) Bepaal de kleinste $x \in \mathbb{N}$ zó dat

$$x \equiv 7 \pmod{33}, \qquad 5x \equiv 11 \pmod{21}, \qquad x \equiv 0 \pmod{2}$$

   (b) (1 pt) Bewijs dat er bij elke $n \in \mathbb{N}$ een rij van n opeenvolgende natuurlijke getallen bestaat, die allen deelbaar zijn door een derde macht> 1.

2. (a) (1 pt) Geef precies aan voor welke oneven priemgetallen p geldt dat $\left(\frac{-7}{p}\right) = 1$.

   (b) (1 pt) Stel $x, y \in \mathbb{Z}$ en $\text{ggd}(x, y) = 1$. Zij p een priemdeler van $4x^2 + 7y^2$. Bewijs dat $p \not\equiv -1 \pmod{7}$.

3. Zij p een priemgetal en g een primitieve wortel modulo p.

   (a) (1 pt) Zij $m \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat g^m een primitieve wortel modulo p is, precies dan als $\text{ggd}(m, p-1) = 1$.

   (b) (1 pt) Zij d een deler van $p - 1$. Bewijs dat de vergelijking $x^d \equiv 1 (\text{mod } p)$ precies d oplossingen heeft.

4. Zij gegeven $a, m \in \mathbb{N}$.

   (a) (1 pt) Bepaal de kettingbreuk van $\sqrt{13}$.

   (b) (1 pt) Bepaal een niet-triviale oplossing (dwz $y > 0$) van $x^2 - 13y^2 = 1$ in $x, y \in \mathbb{N}$.

5. Kies $a, b, c \in \mathbb{N}$ en beschouw de vergelijking

$$ax^n + by^n = cz^{n+1}$$

   in $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 3$ en $\text{ggd}(x, y) = 1$. Laat zien dat het abc-vermoeden impliceert dat deze vergelijking hooguit eindig veel oplossingen heeft. Geef eerst de afleiding voor die gevallen waarin $\text{ggd}(ax^n, by^n) = 1$ (3/2 pt), bewijs daarna de bewering in het algemeen (1/2 pt).