

DERDE TUSSENTOETS 'INLEIDING IN DE GETALTHEORIE'

dinsdag 24 oktober 2017, 9 uur - 10 uur

Opmerking: Een eenvoudige rekenmachine is toegestaan (dus geen programmeerbare rekenmachine of smartphone).

Opgave 1

Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{10}$ en $\sqrt{18}$.

Opgave 2

Bepaal het getal dat hoort bij de volgende kettingbreuken

$$\langle 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots \rangle \quad \text{en} \quad \langle 4, 8, 8, 8, 8, \dots \rangle.$$

Opgave 3

Laat zien dat voor elk paar natuurlijke getallen $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{4q^2}.$$

Opgave 4

Bewijs dat er oneindig veel natuurlijke getallen $n \in \mathbb{N}$ bestaan zó dat de vergelijking

$$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

geen gehele oplossing $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ met $\text{ggd}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ heeft. (Hint: welke eigenschap hebben oplossingen van $2^a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ met $a > 0$?)