

TWEEDE TUSSENTOETS 'INLEIDING IN DE GETALTHEORIE'

dinsdag 10 oktober 2017, 9 uur - 10 uur

Opmerking: Een eenvoudige rekenmachine is toegestaan (dus geen programmeerbare rekenmachine of smartphone).

Opgave 1

Welke van de volgende congruëntievergelijkingen zijn oplosbaar?

$$x^2 \equiv 7 \pmod{53}$$

$$x^2 \equiv 21 \pmod{101}$$

$$x^2 \equiv 73 \pmod{77}$$

$$16x^2 \equiv 5 \pmod{372}$$

Opgave 2

Bepaal alle oneven priemgetallen waarvoor -3 een kwadraatrest is.

Opgave 3

Zij q een oneven priemgetal en stel dat ook $p = 2q + 1$ een priemgetal is. Bewijs dat 2 een primitieve wortel modulo p is dan en slechts dan als $q \equiv 1 \pmod{4}$.

Opgave 4

Bewijs dat de kwadratische wederkerigheidswet uit volgende bewering volgt (die trouwens equivalent is aan de kwadratische wederkerigheidswet):

Als $p \neq q$ twee oneven priemgetallen zijn, dan geldt

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 1 \iff \text{er is een oneven } x \in \mathbb{Z} \text{ zo dat } p \equiv \pm x^2 \pmod{4q}.$$